Mémoire de Stage de M2
Diagrammes de Rauzy en Genre 1

Wang, Zhiren
Sous La Direction de Prof. Jean-Christophe Yoccoz

Table des matières

1 Introduction

Le début du rapport est une révision de la première moitié de [4], qui montre les relations entre les surfaces de translation et les échanges d'intervalles et définit les diagrammes de Rauzy. Une introduction à la dégénérence de Rauzy est empruntée de [1]. Ensuite un effort spécial est consacré au but d'établir un morphisme des groupes fondamentaux des diagrammes et les groupes modulaires des surfaces. Le cas de $g = 1$ munit des exemples concrètes de ce qui est déjà vu. Un résultat qui montre la surjectivité du morphisme dans les groupes modulaires du tore termine le mémoire.

Je dois mes meilleurs remerciements à mon directeur de stage, Prof. Yoccoz, qui m'a introduit à ce sujet et m'a énormément aidé.

2 Surfaces de translation

2.1 Définition des surfaces de translation

Définition 2.1. *Un* **atlas de translation** *est un atlas d'une variété tel que les changements de cartes locales soient localement des translations.*

Définition 2.2. *Une* **surface de translation** *est par définition une surface topologique compacte connexe M, muni d'un ensemble fini non vide Σ de points qui s'appelent* **points marqués**, *telle que la partie $M - \Sigma$ possède un atlas de translation et la condition suivante soit justifiée:*

$\forall q \in \Sigma$, il existe un voisinage V_q de q dans M, un voisinage W_q de l'origine dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, et un revêtement ramifié η_q de degré fini m_q: $(V_q, q) \mapsto (W_q, 0)$ tel que les sections locales hors de q soient des cartes de l'atlas muni modulo une translation.

La notion de revêtement ramifié ici est au sens de Fox (*branched covering*, cf.[3]).

La surface de translation la plus simple est le tore:

Exemple 2.3. *$\mathbb{T} \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de s points marqués quelconques est une surface de translation.* En effet, on peut toujours choisir un voisinage $\tilde{V}_q$ simplement connexe de chaque point marqué q, tel que ces s voisinages recouvrent $\mathbb{T}$ entier. Grâce à la connexité simple l'application d'identité $\tilde{V}_q \mapsto \tilde{V}_q$ peut toujours être relevé à un homéomorphisme $\tilde{\eta}_q : \tilde{V}_q \mapsto \tilde{W}_q$ vis-à-vis du revêtement $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T}$ où $\tilde{W}_q$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors les restrictions η_q de $\tilde{\eta}_q$ sur $V_q := \tilde{V}_q - \Sigma$ définissent un atlas de translation de $\mathbb{T} - \Sigma$ parce que les sections locales de deux relèvements de l'application de l'identité du tore s'identifient modulo une translation. On conclut en remarquant qu'un homéomorphisme est un revêtement ramifié de degré 1.

Donnons maintenant quelques propriétés fondamentales des surfaces de translation.

Théorème 2.4. *Soit M une surface de translation, alors:*
i). M est une surface de Riemann;
ii). Il existe une 1-forme holomorphe ω, sans zéros hors de Σ, et possédant un zéro d'ordre $m_q - 1$ en $q \in \Sigma$; ainsi qu'une forme d'aire Ω définie partout dan M.
iii). Il existe une métrique plate $|\mathrm{d}z|$ sur $M - \Sigma$;
iv). Le genre g de M est déterminé par $2g - 2 = \sum_{q\in\Sigma}(m_q - 1)$.

Preuve. *i).* $\forall q \in \Sigma$, en choisissant une partie $B(0, r_q)$ du voisinage W_q de 0 dans $\mathbb{C}$ telle que les $\eta_q^{-1}(B(0, r_q)$ soient disjoints on remplace W_q par $B(0, r_q)$. Car $\pi_1(B(0, r_q) - \{0\}) = \mathbb{Z}$, les classes homéomorphes des revêtements de $B(0, r_q) - \{0\}$ sont bijectivement associées aux sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Le sous-groupe $\{0\}$ est représenté par le revêtement de degré infini $\{\mathrm{Re} z < \log r_q\} \mapsto B(0, r_q) - \{0\} : z \mapsto e^z$; les autres sous-groupes, de la forme $m\mathbb{Z}$, sont représentés par la revêtement $B(0, \sqrt[m]{r_q}) - \{0\} \mapsto B(0, r_q) - \{0\}$: $z \mapsto z^m$, de degré m. En conséquence il existe un homéomorphisme $\phi_q : V_q - \{q\} \mapsto B(0, \sqrt[m_q]{r_q}) - \{0\}$ tel que $(\phi_q(a))^{m_q} = \eta_q(a), \forall a$.

Prolongeons ϕ_q dans V_q en posant $\phi_q(q) = 0$. Alors ϕ_q est une bijection de V_q dans $B(0, \sqrt[m_q]{r_q})$ et il est un homéomorphisme hors de q. Il est continu en q car lorsque $a \to q$ dans V_q, $\eta_q(a)$ tend vers 0, donc sa racine m_q-ième $\phi_q(a)$ tend vers 0 aussi. Montrons que ϕ_q^{-1} est continu en 0.

Par définition, un revêtement ramifié est un *spread*, c'est-à-dire les préimages des ouverts forment une base de la source ([3], p244). Donc pour un voisinage arbitraire V de q dans V_q, $\exists \epsilon > 0$ tel que $\eta_q^{-1}(B(0, \epsilon)) \subseteq V$. Mais $\eta_q^{-1}(B(0, \epsilon)) = \phi_q^{-1}(B(0, \sqrt[m_q]{\epsilon}))$, donc ϕ_q^{-1} est continu en 0. Ainsi on a démontré que ϕ_q est un homéomorphisme sur V_q entier.

Soit $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I}$ l'atlas de translation de $M - \Sigma$, alors $\{U_i, \psi_i\}_{i \in I} \bigcup \{V_q, \phi_q\}_{q \in \Sigma}$ est un altas topologique de M. Car les $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ sont des translations et les ouverts V_q sont disjoints, pour voir que les changements des cartes locales sont holomorphes il suffit de le montrer pour celui entre un $\{U_i, \psi_i\}$ et un $\{V_q, \phi_q\}$. Ceci résulte de la formule $\psi_i(a) = \eta_q(a) + \text{constante} = (\phi_q(a))^{m_q} + \text{constante}$. Donc M est muni d'une structure de surface de Riemann.

ii). La 1-forme holomorphe cherchée ω s'écrit $\mathrm{d}z$ dans $\psi_i(U_i)$ et $\mathrm{d}(z^{m_q})$ dans $\phi_q(V_q)$.

La forme d'aire Ω s'écrit $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$ dans $\psi_i(U_i)$ et $m_q^2 (x^2 + y^2)^{m_q - 1} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{i}}{2} \mathrm{d}(z^{m_q}) \wedge \mathrm{d}(\bar{z}^{m_q})$ dans $\phi_q(V_q)$.

iii) est évident.

iv) résulte directement de *ii)* et du théorème de Riemann-Roch. □

2.2 Orbites du champ vertical

Dans $M - \Sigma$ le vecteur $\frac{\partial}{\partial y}$ définit un **champ vertical**, dont les trajectoires sont évidemment géodésiques par rapport à la métrique $|\mathrm{d}z|$. Ce champ de vecteur peut aussi décrit par l'équation $\langle \cdot, \omega \rangle = \mathrm{i}$.

Plaçons-nous maintenant dans V_q, ce champ n'est plus défini lorsque l'indice de ramification m_q est strictement supérieure à 1 en q où ω s'annule. Cependant on peut toujours regarder ses trajectoires hors de q, qui sont localement définies par l'équation $\mathrm{Re} z^{m_q} = \text{constante}$. Il y a exactement $2m_q$ trajectoires, respectivement de la forme $\{\arg z = \frac{(2k+1)\pi}{2m_q}, k \in \mathbb{Z}\}$, dont les adhérences contiennent q. Les autres trajectoires sont des courbes qui se trouvent dans les angles entre deux rayons de ce type.

Définition 2.5. *Une* **séparatrice entrante** *est une trajectoire du champ vertical aboutissant en temps fini en un point marqué. Une* **séparatrice sortante** *est une trajectoire du champ vertical émergeant d'un point marqué.*

En $q \in \Sigma$, il y a exactement m_q séparatrices entrantes (lorsque k est pair) et m_q séparatrices sortantes (lorsque k est impair).

Définition 2.6. *Un* **segment bien coupé** *est un segment S, géodésique par rapport à la métrique $|\mathrm{d}z|$ et non vertical, qui satisfait les conditions suivantes:*
i). Chacune des extrémité de S se trouve sur une séparatrice (point marqué inclus), lorsque aucun autre point de S n'est marqué.
ii). Le segment de cette séparatrice joignant l'extrémité et le point marqué n'a pas d'autre intersection avec S.

Convention. Dans toute la partie qui suit, quand on parle de la topologie de S sans autre remarque, il s'agira de la topologie naturelle d'un segment, au lieu de la topologie induite dans M.

Notons le flot du champ vertical par $Y^t(a) \in M - \Sigma$ en $(t, a) \in \mathbb{R} \times (M - \Sigma)$ où il est bien défini. Soient $\{U_i, \psi_i\}$ les cartes locales, identifions U_i et $\psi_i(U_i)$ pour simplifier le language. Alors on a:

Lemme 2.7. *Si Y^t est bien défini en $a \in M - \Sigma$, alors il l'est sur un voisinage $B(a, \epsilon)$ dans une carte locale. En plus $\forall b \in B(a, \epsilon)$, il existe une carte locale contenant $Y^t(a)$ et $Y^t(b)$, dans laquelle le vecteur $Y^t(b) - Y^t(a) = b - a$.*

Preuve. Lorsque $t = 0$ le lemme est trivial. Supposons $t > 0$; le cas $t < 0$ est symmétrique. L'intervalle $[0, t]$ est recouvert par les ouverts $\{t | Y^t(a) \in U_i\}$. Comme $[0, t]$ est compact, $\exists n \in \mathbb{N}, 0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = t, i_k \in I, \forall k = 1, 2, ..., n$ tels que $Y^s(a) \in U_{i_k}$ si $s \in [s_{k-1}, s_k]$. Comme $\{Y^s(a) | s_{k-1} \leq s \leq s_k\}$ est un compact dans U_{i_k}, $\exists \epsilon_k > 0$ tel que $\bigcup_{s_{k-1} \leq s \leq s_k} B(Y^s(a), \epsilon_k) \subset U_{i_k}$.

En conséquence, dans U_{i_k} avec $\epsilon = \min \epsilon_k$ une restriction du flot $Y^{s_k - s_{k-1}}$ est une translation envoyant holomorphement $B(Y^{s_{k-1}}(a), \epsilon)$ dans $B(Y^{s_k}(a), \epsilon)$. Inductivement on voit que $Y^{s_k}(b) - Y^{s_k}(a) = b - a$ parce que les changements de cartes ne modifient pas cette différence non plus. $\square$

Etudions l'application du premier retour T_S du champ vertical sur $\mathrm{int}S$. Son domaine de définition $D(T_S)$ est l'ensemble $\{a \in \mathrm{int}S | \exists t > 0, Y^t(a) \in \mathrm{int}S\}$.

Lemme 2.8. *Soit S un segment bien coupé, alors $D(T_S)$ est dense dans S.*

Preuve. Considérer la forme d'aire Ω, définit sur M entier. En vertu de la compacité, M est d'aire finie. Comme Ω coïncide avec la mesure de Lebesgue sur U_i, que nous identifions à une partie ouverte de $\mathbb{C}$, on peut obtenir une mesure μ sur $M-\Sigma = \bigcup_{i\in I} U_i$ par recollement, de masse totale finie.

Ligne géodésique de la surface de translation, S a une direction unique (modulo l'inversement d'orientation) $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ différente de $\frac{\partial}{\partial y}$. Remarquont que les ouverts $C(a,\delta) = \{a + \lambda_1\frac{\partial}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} | (\lambda_1,\lambda_2) \in (-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)\}_{a\in\mathbb{C},\delta>0}$ forment une base topologique de $\mathbb{C}$.

Pour tout point intérieur a de S, car a n'est pas marqué $\exists i \in I$, $a \in U_i$. Donc $\exists\delta_a \in (0,\frac{1}{3})$ tel que $C(a,\delta_a) \subset U_i$ et $\{a + \lambda\frac{\partial}{\partial\vartheta} | \lambda \in (-\delta_a,\delta_a)\} \subset S$. Notons $\tilde{S} = \bigcup_{a\in\mathrm{int}S} C(a,\delta_a)$. Alors $\mu(\tilde{S}) > 0$.

Le flot Y^1 est défini partout dans $M-\Sigma$ sauf en les points dont les trajectoires verticales partantes rencontre un point marqué en temps inférieur à 1. Ces points forment des segments aux bouts des séparatrices entrantes (dont le nombre est fini), donc ils sont de mesure nulle. Alors Y^1 est défini μ-presque partout dans $M-\Sigma$ (et donc dans M). Evidemment Y^1 préserve la forme d'aire Ω s'il est défini, donc il préserve la mesure μ. Notons $\{s \in \tilde{S} | \exists n \in \mathbb{N}, Y^n(s) \in \tilde{S}\}$ par $\tilde{S}_{\mathrm{recu}}$. En vertu du théorème de récurrence de Poincaré, $\tilde{S}_{\mathrm{recu}}$ est de mesure totale (donc dense) dans $\tilde{S}$.

$\forall c \in \tilde{S}_{\mathrm{recu}}$, si $Y^n(c) \notin \mathrm{int}S$ alors $\exists b_0 \in \mathrm{int}S$ tel que $Y^n(c) \in C(b_0,\delta_{b_0})$. Supposons $Y^n(c) = b_0 + \beta_1\frac{\partial}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ avec $\beta_1,\beta_2 \in (-\delta_{b_0},\delta_{b_0})$. Notons $b = b_0 + \beta_2\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, alors $b \in S$ par le choix de δ_{b_0}. D'ailleurs $b = Y^{-\beta_1}(Y^n(c)) = Y^{n-\beta_1}(c)$, avec $n - \beta_1 \geq 1 - \delta_{b_0} \geq \frac{2}{3}$.

$\forall a \in \mathrm{int}S, \forall\epsilon < \delta_a$, par la densité de $\tilde{S}_{\mathrm{recu}}$ dans $C(a,\delta_a) \subset \tilde{S}$, $\exists\alpha_1,\alpha_2 \in (-\epsilon,\epsilon), a + \alpha_1\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial\vartheta} \in \tilde{S}_{\mathrm{recu}}$. Notons $a_0 = a + \alpha_2\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, alors $a_0 \in S$. $\exists s \geq \frac{2}{3}$ tel que $Y^{s+\alpha_1}(a_0) = Y^s(Y^{\alpha_1}(a_0)) = Y^s(a + \alpha_1\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial\vartheta}) \in S$, avec $s + \alpha_1 \geq \frac{2}{3} - \delta_a \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0$. Donc $a_0 \in D(T_S)$. Comme a_0 est arbitrairement proche de a lorsque $\epsilon \to 0$, le lemme suit. □

Continuons à adopter des notions dans la démonstration précédente. Une application du lemme 2.7 au cas $b = a + \delta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ avec δ assez petit montre immédiatement que l'ensemble $D(T_S)$ est ouvert dans S. En effet, on peut avoir mieux.

Lemme 2.9. *Dans une composante connexe du ouvert $D(T_S)$:*

i) Le temps du premier retour est constant;

ii) La restriction de T_S donne une translation.

Preuve. En vertu de la connexité, il suffit de démontrer ces propriétés localement. Le point *ii)* est direct d'après le lemme 2.7. Montrons le premier énoncé.

Si pour $a \in D(T_S)$ avec temps de premier retour t_a, le demi-intervalle $\{a + \delta\frac{\partial}{\partial\vartheta} | \delta \in [0,\epsilon)\}$ dans S est contenu dans $D(T_S)$. (Il est symmétrique pour les demi-intervalles ouverts à gauche.) Il suffit de monter que tout point dans ce demi-intervalle possède la même temps de premier retour si ϵ est assez petit. En effet, si $Y^{t_\delta}(a+\delta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) \in S$ avec $0<\delta<\epsilon, 0<t_\delta<t_a$, alors le lemme 2.7 affirme que $Y^{t_\delta}(a) = Y^{t_\delta}(a+\delta\frac{\partial}{\partial\vartheta}) - \delta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$. Mais $Y^{t_\delta}(a) \notin \mathrm{int}S$, le seul cas possible est qu'il y a un point intérieur $0 \leq \delta' \leq \delta < \epsilon$ tel que $Y^{t_\delta}(a+\delta'\frac{\partial}{\partial\vartheta}) = e_0$ où e_0 est l'extrémité gauche de S. Alors sur la ligne géodésique passant par e_0, e_0 se trouve entre deux points de S, respectivement $a+\delta'\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ et $Y^{t_a}(a+\delta'\frac{\partial}{\partial\vartheta})$; ce qui contredit l'hypothèse *ii)* de la définition 2.6. Le lemme est gagné par l'absurde. □

Lemme 2.10. *Si une extrémité d'une composante connexe de $D(T_S)$ n'est pas une des extrémités de S, alors elle se trouve sur une séparatrice entrante. (Et évidemment il n'y a donc pas d'autre point de* int$S$ *dans le segment de cette séparatrice joignant le point marqué au bout et le point en question.)*

Preuve. Notons par a l'extrémité gauche d'une composante connexe qui n'est pas l'extrémité gauche e_0 de S (pour le cas droite c'est pareil). Supposons par l'absurde que l'orbite positive du champs vertical partant de a ne soit arrêté par aucun point marqué, alors il avance infiniement sans intersecter int$S$. Sur un intervalle ouvert $\{a+\delta\frac{\partial}{\partial\vartheta}|\delta \in (0,\epsilon)\}$ l'application T_S est de temps de premier retour constant t. Mais $Y^t(a)$ est défini et hors de int$S$. En vertu du lemme 2.7, si ϵ est choisi assez petit, le seul cas possible est que pour un certain point intérieur $0 \leq \delta' \leq \delta < \epsilon$, $Y^t(a+\delta'\frac{\partial}{\partial\vartheta}) = e_0$. Si $Y^t(a) = e_0$ alors a est sur une séparatrice entrante (sinon a serait entre e_0 et le point marqué du séparatrice, qui contredit l'hypothèse sur e_0), contradiction. Lorsque $Y^t(a) \neq e_0$ Comme δ peut être arbitrairement petit, il y a un nombre infini de points différents $\{b_n\}$, convergeant vers a, tels que $Y^t(b_n) = e_0$. Cependant l'ensemble $\{b|Y^t(b) = e_0\}$ est fini (si $e_0 = q \in \Sigma$, alors $\#\{b|Y^t(b) = e_0\} \leq m_q$; sinon $\#\{b|Y^t(b) = e_0\} \leq 1$). Contradiction! □

Ces lemmes nous permettront, dans la section suivante, de parler du comportement des flots verticaux d'une manière combinatoire.

3 Echanges d'intervalles

3.1 Définition des échanges d'intervalles

Définition 3.1. *Une* **configuration de données combinatoires** *est un objet formé par:*
i). Un ensemble fini non vide $\mathcal{A}$, de cardinal $d \geq 2$, qui s'appelle l'alphabet;
ii). Deux bijections $\pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}} : \mathcal{A} \mapsto \{1,2,...,d\}$.

Une configuration de données combinatoires est dit **irréductible** *s'il n'existe aucun entier strictement positif $k<d$ tel que $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1,2,...,k\}) = \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1,2,...,k\})$.*

Définition 3.2. *Etant donnée une configuration de données combinatoires $\mathcal{A}$, un* **vecteur de longueurs** *est une application $\mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+$.*

Définition 3.3. *Un application T est un* **échange d'intervalle** *sur $[0, L]$ s'il existe une configuration de données combinatoires $\mathcal{A}$ munie de une paire de vecteurs de longueurs λ_t,λ_b telles que:*
i). $L = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\mathrm{t}(\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\mathrm{t}(\alpha)$;
ii). T est de domaine $D(T) = [0, L) - \{\sum_{\pi_\mathrm{t}(\beta)<\pi_\mathrm{t}(\alpha)} \lambda_\mathrm{t}(\beta)|\alpha \in \mathcal{A}\}$, d'image $I(T) = [0, L) - \{\sum_{\pi_\mathrm{b}(\beta)<\pi_\mathrm{b}(\alpha)} \lambda_\mathrm{b}(\beta)|\alpha \in \mathcal{A}\}$;
iii). La restriction de T sur $D_\alpha(T) = (\sum_{\pi_\mathrm{t}(\beta)<\pi_\mathrm{t}(\alpha)} \lambda_\mathrm{t}(\beta), \sum_{\pi_\mathrm{t}(\beta)\leq\pi_\mathrm{t}(\alpha)} \lambda_\mathrm{t}(\beta))$ est un homéomorphisme croissant d'image $I_\alpha(T) = (\sum_{\pi_\mathrm{b}(\beta)<\pi_\mathrm{b}(\alpha)} \lambda_\mathrm{b}(\beta), \sum_{\pi_\mathrm{b}(\beta)\leq\pi_\mathrm{b}(\alpha)} \lambda_\mathrm{b}(\beta))$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Un échange d'intervalles est dit irréductible si ses données combinatoires le sont. Lorsque $\lambda_\mathrm{t} = \lambda_\mathrm{b}$ et les homéomorphismes dans iii) sont effetivement des translations, T est appelé un **échange d'intervalle linéaire**.

Les applications π_t et π_b déterminent deux ordres différents, disons respectivement *l'ordre top* et *l'ordre bottom*, dans lesquels on tri les intervalles représentés par l'alphabet $\mathcal{A}$.

Evidemment T^{-1} est un échange d'intervalles si et seulement si T l'est, en échangeant les lettres t et b. Soit $(\mathcal{A}, \pi_\mathrm{t}, \pi_\mathrm{b}, \lambda_\mathrm{t}, \lambda_\mathrm{b}, T)$ un échange d'intervalles, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, notons $u_\mathrm{c}(\alpha) = \sum_{\pi_\mathrm{c}(\beta)<\pi_\mathrm{c}(\alpha)} \lambda_\mathrm{c}(\beta)$ avec $\mathrm{c} = \mathrm{t}, \mathrm{b}$. Alors lorsque $\pi_\mathrm{t}(\alpha) > 1$, $u_\mathrm{t}(\alpha)$ est une singularité de T; contrairement lorsque $\pi_\mathrm{b}(\alpha) > 1$, $u_\mathrm{b}(\alpha)$ est une singularité de T^{-1}.

Lorsque T est linéaire, on note par $\delta(\alpha)$ la différence $u_\mathrm{b}(\alpha) - u_\mathrm{t}(\alpha)$, qui est la distance de la translation $T|_{D_\alpha(T)}$.

Définition 3.4. *$\delta \in \mathbb{R}^\mathcal{A}$ s'appelle le* **vecteur de translation** *de l'échange d'intervalle linéaire T.*

3.2 Liaisons et minimalité

Définition 3.5. *Une* **liaison** *de l'échange d'intervalles T est un triplet $(m, \alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ tel que $\pi_\mathrm{t}(\alpha) > 1$, $\pi_\mathrm{b}(\beta) > 1$, $T^m(u_\mathrm{b}(\beta)) = u_\mathrm{t}(\alpha)$.*

Une liaison est une singulaité de T^{-1} qui est envoyé a une singularité de T dans un nombre fini de pas. Une liaison de T détermine une liaison de T^{-1}. Evidemment un échange d'intervalles linéaire sans liaison est irréductible.

Théorème 3.6. (Keane) *Soit $(\mathcal{A}, \pi_\mathrm{t}, \pi_\mathrm{b}, \lambda, T)$ un échange d'intervalles linéaire irréductible, si les cordonnées du vecteur λ sont rationnellement indépendantes, alors T est sans liaison.*

Rappelons d'abords que dans $[0, L]$ la cordonnée de toute singularité de T et T^{-1}, ainsi que toute distance de translation $\delta(\gamma)$, est une forme linéaire du vecteur λ à coéfficients entiers. Donc en vertu de l'indépendance rationnelle de λ, le théorème résulte directement du lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit $(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}, \lambda, T)$ un échange d'intervalles linéaire, considérons $\mathcal{A}$, π_{t}, π_{b} comme donnés et λ comme un variable. S'il existe $m \leq 0$, $\alpha, \beta, \gamma_1, .., \gamma_m \in \mathcal{A}$ tels que $\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\beta) > 1$, $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\alpha) > 1$, la forme linéaire $\Lambda = u_{\mathrm{b}}(\beta) + \sum_{i=1}^{m} \delta(\gamma_i) - u_{\mathrm{t}}(\alpha)$ soit la forme nulle sur le vecteur λ, alors T est réductible.*

Preuve. Supposons par l'absurde que T soit irréductible. Pour tout $\gamma \in \mathcal{A}$ et toute forme linéaire Ω sur le vecteur λ, notons par $c_\gamma(\Omega)$ le coéfficient devant $\lambda(\gamma)$ dans Ω.

Si $m = 0$, alors $u_{\mathrm{b}}(\beta) = u_{\mathrm{t}}(\alpha)$ au niveau de forme linéare. Ceci signifie que $\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\beta) = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\alpha) = k+1$, $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, 2, ..., k\}) = \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, 2, ..., k\})$; ce qui contredit l'irréductibilité.

Si $m > 0$, $\{\gamma | \pi_{\mathrm{t}}(\gamma) < \pi_{\mathrm{t}}(\gamma_1)\} = \{\gamma | \pi_{\mathrm{b}}(\gamma) < \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_1)\}$, alors pour éviter la contradiction la seule possibilté est que ces ensembles sont vide. Mais dans ce cas $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1\}) = \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1\})$, il n'y a toujours pas d'irréductibilité.

Si $m > 0$, $\{\gamma | \pi_{\mathrm{t}}(\gamma) < \pi_{\gamma|\mathrm{t}}(\gamma_1)\} \neq \{\pi_{\mathrm{b}}(\gamma) < \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_1)\}$, alors $\exists \gamma_0 \neq \gamma_1$, $\pi_{\mathrm{t}}(\gamma_0) > \pi_{\mathrm{t}}(\gamma_1), \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_0) < \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_1)$ ou $\pi_{\mathrm{t}}(\gamma_0) < \pi_{\mathrm{t}}(\gamma_1), \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_0) > \pi_{\mathrm{b}}(\gamma_1)$. Sans perte de généralité, on peut prendre cette dernière situation; l'autre est symmétrique. Alors $c_{\gamma_0}(\delta(\gamma_1)) = c_{\gamma_0}(u_{\mathrm{b}}(\gamma_1)) - c_{\gamma_0}(u_{\mathrm{t}}(\gamma_1)) = 0 - 1 < 0 - 0 = c_{\gamma_1}(u_{\mathrm{b}}(\gamma_1)) - c_{\gamma_1}(u_{\mathrm{t}}(\gamma_1)) = c_{\gamma_1}(\delta(\gamma_1))$. D'ailleurs $\forall \theta \in \mathcal{A}$, $c_{\gamma_0}(u_{\mathrm{b}}(\theta)) \leq c_{\gamma_1}(u_{\mathrm{b}}(\theta))$, $c_{\gamma_0}(u_{\mathrm{t}}(\theta)) \geq c_{\gamma_1}(u_{\mathrm{t}}(\theta))$. En sommant ces inégalités sur $\Lambda = \delta(\gamma_1) + [u_{\mathrm{b}}(\beta) + \sum_{i>1} u_{\mathrm{b}}(\gamma_i)] - [\sum_{i>1} u_{\mathrm{t}}(\gamma_i) + u_{\mathrm{t}}(\alpha)]$, on a $c_{\gamma_0}(\Lambda) < c_{\gamma_1}(\Lambda)$. Mais Λ est la forme nulle, contradiction! $\square$

Nous nous intéressons ensuite à la propriété d'un échange d'intervalles linéaire sans liaison.

Lemme 3.8. *Un échange d'intervalles linéaire sans liaison est sans orbite périodique.*

Preuve. Prolongeons T avec la continuité à droite dans l'intervalle semi-ouvert $[0, L)$ en posant $T(u_{\mathrm{t}}(\alpha)) = u_{\mathrm{b}}(\alpha), \forall \alpha \in \mathcal{A}$, alors T est bijective dans $[0, L)$ et préserve la mesure de Lebesgue.

Si $\exists m > 0, x_0 \in D(T)$ tel que $T^m(x) = x$, alors $y = \inf\{x \in [0, L) | T^m(x) = x\}$ est lui-même m-périodique car la fonction $T^m(x) - x$ est continue à droite. En plus, $\exists \beta \in \mathcal{A}, \mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}$ tel que $y = u_{\mathrm{c}}(\beta)$, sinon avec $\epsilon = \frac{1}{2} \min_{i=0,..,m-1; \alpha \in \mathcal{A}; \mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}} |T^i(y) - u_{\mathrm{c}}(\alpha)|$ on aurait $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \{x \in [0, L) | T^m(x) = x\}$. Ceci produit une liaison. $\square$

Théorème 3.9. (Keane) *Un échange d'intervalles linéaire T sans liaison est minimal, c'est-à-dire toute demi-orbite positive ou négative infini est dense.*

Preuve. La démonstration est un peu similaire à celles faite sur un segment bien coupé dans une surface de translation. Prologeons toujours T dans $I = [0, L)$ comme dans le lemme. Il suffit de montrer $\forall J = [a, b) \subset [0, L)$, $\bigcup_{n \geq 0} T^n([a, b)) = [0, L)$ (ceci prouve la partie des orbites positive lorsque l'autre moitié est symmétrique).

Etudions l'application de premier retour T_J de T dans J, qui est définie presque partout dans J grâced au théorème de récurrence de Poincaré. Soit x un point de son domaine $D(T_J)$ avec temps de premier retour m_x, alors il y a deux possibilités:
i). L'orbite positive de x (x lui-même inclus) rencontre un élément de $\{u_{\mathrm{c}}(\beta) | \beta \in \mathcal{A}, \mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}\} \bigcup \{a, b\}$ avant de ou lorsque retourner dans J. Dans ce cas x doit être le point de la premier rencontre avec J de l'orbite négative d'une singularité $u_{\mathrm{c}}(\beta)$, donc il y a au plus un nombre fini de tels x.
ii). Sinon toujours avec $\epsilon = \frac{1}{2} \min_{y \in \{u_{\mathrm{c}}(\beta) | \beta \in \mathcal{A}, \mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}\} \bigcup \{a, b\}} |T^i(x) - y|$ la restriction de T_J dans $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ donne une translation avec temps de premier retour constant. Donc l'ensemble de tels x est un ouvert. Considérons une composante connexe (y, z) de cet ouvert, alors $y \in D(T_J)$, c'est parce que la fonction T^{m_x} est continue à droite lorsque l'intervalle J est stable par la limite à droite. Cependant y n'est pas un point de type *ii)* vu qu'il n'a pas un voisinage ouvert de type *ii)*, donc il appartient à l'ensemble fini plus haut. Ainsi on a montré que cette ouvert n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

Donc on conlcut que $D(T_J)$ est l'union de un nombre fini de point $\{y_i\}$ et de un nombre fini K d'intervalles ouverts $\{J'_k\}$ dans les quelles T_J est une translation et et le temps de premier retour est une constrante. En plus l'extrémité gauche de chaque J'_k est un y_i et $D(T_J)$ est de mesure pleine (donc dense) dans J. La seule possibilité est que $D(T_J) = J$ et la correspondence entre les J'_k et les y_i sont bijective: $J'_k = (y_k, y_{k+1}), k = 1, 2, ..., K-1; J'_K = (y_K, b)$. Notons par J_k l'union de J'_k et son extrémité gauche y_k. En vertu de la finitude du nombre de ces composantes le temps de premier retour est borné: $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall x \in J$, $\exists 0 \leq m \leq M$, $T^m(x) \in J$.

Posons donc $\tilde{J} := \bigcup_{n \geq 0} T^n(J) = \bigcup_{k=1,..,k} \bigcup_{0 \leq n \leq M} T^n(J_k)$. Observons que $\tilde{J}$ est l'union finie d'intervalles semi-ouverts, d'où $T(\tilde{J})$ l'est aussi et possède la même mesure que $\tilde{J}$. Mais $T(\tilde{J}) \subset \tilde{J}$, d'où $T(\tilde{J}) = \tilde{J}$.

Supposons par l'absurde que $\tilde{J} \neq I$, il y a deux cas:

i). $J = [0, l)$ avec $l < L$. Dans ce cas $\lambda(\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1)) < l$ (sinon $T(\tilde{J}) = \tilde{J} + \delta(\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1))$ avec $\delta(\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1)) > 0$, donc n'est pas contenu dans $\tilde{J}$). En conséquence $\emptyset \subsetneq \mathcal{F}_{\mathrm{t}} := \{\alpha \in \mathcal{A} | D_\alpha(T) \subset J\} \subsetneq \mathcal{A}$ et en plus $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, ..., \#\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\})$, de même $\mathcal{F}_{\mathrm{b}} := \{\alpha \in \mathcal{A} | I_\alpha(T) \subset J\} = \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, ..., \#\mathcal{F}_{\mathrm{b}}\})$. L'égalité $T(\tilde{J}) = \tilde{J}$ montre $\mathcal{F}_{\mathrm{t}} = \mathcal{F}_{\mathrm{b}}$, d'où T est réductible donc de liaison.

ii). Dans le cas contraire, on peut toujours trouver $\tilde{y} \in (0, L)$ qui est l'extrémité gauche d'une composante connexe de $\tilde{J}$. Si l'orbite positive de $\tilde{y}$ est infinie, tout point de cette orbite est l'extrémité gauche d'une composante connexe de $\tilde{J}$, dont le nombre est fini; on voit que $\tilde{y}$ est périodique, d'où une liaison selon le lemme 3.8. Donc on peut supposer que l'orbite positive de $\tilde{y}$ rencontre une singularité de T, et symétriquement, son orbite négative rencontre une singularité de T^{-1}; ce qui produit une liaison.

Donc il ne reste que la possibilité $\tilde{J} = I$, ce qui montre la minimalité. □

3.3 Echanges d'intervalles dans une surface de translation

Généralement si un échange d'intervalles T est défini sur le segment $[0, L]$ et $\psi : S \mapsto [0, L]$ est un homéomorphisme, alors $\psi^{-1}T\psi$ est aussi appelé un échange d'intervalles du segment S. Lorsque ψ est une équivalence entre une mesure naturellement définie sur I et la longueur sur $[0, L]$, $\psi^{-1}T\psi$ est dit linéaire si T l'est.

Théorème 3.10. *Soit (M, Σ) une surface de translation dans laquelle est donné un segment bien coupé S, alors l'application du premier retour T_S du champ vertical dans* int$S$ *est un échange d'intervalle linéaire. Une singularité de T_S est un point de S qui se trouve sur une séparatrice entrante telle qu'il n'y a pas d'autre intersection de* int$S$ *dans le segment de la séparatrice joignant le point marqué qu'elle entre et le point en question.*

Les lemmes 2.8, 2.9 et 2.10, appliqués simultanément au flot positif T_S et au flot négatif T_S^{-1}, donnent directement le théorème précédent.

Géométriquement une liaison de l'échange d'intervalles sur un segment bien coupé produit une séparatrice de longueur finie, c'est-à-dire elle est à la fois sortante et entrante. On appele une séparatrice finie dans une surface de translation une **liaison** (*saddle connection*). Dans la suite on s'intéresse uniquement aux surface sans liaison. En effet, une discussion dans [4],p22 explique comment on peut transformer toute surface de translation dans une surface sans liaison.

Définition 3.11. *Dans une surface de translation (M, Σ), un segment bien coupé S est dit* **complet** *si toute séparatrice (entrante ou sortante) rencontre l'intérieur de S.*

Remarque. Le théorème 3.10 permet de voir que cette définition est équivalente à dire que le nombre d'intervalles d de l'échange d'intervalles T_S vaut $\sum_{q \in \Sigma} m_q + 1$.

Théorème 3.12. *Supposons que M soit sans liaison, alors un segment bien coupé S est complet si et seulement si toute demi-orbite infinie (positive ou négative) rencontre l'intérieur de S.*

Preuve. La suffisance étant triviale, regardons la nécessité. Notons par Z le sous-ensemble de $M - \Sigma$ des points dont l'orbite positive du champ vertical est finie ou rencontre l'intérieur de S.

Soit $a \in Z$, si son orbite positive rencontre l'intérieur de S, alors le lemme 2.7 montre que celles des points dans un voisinage suffisamment petit de a rencontre l'intérieur de S aussi. Si par contre cette orbite rencontre $q \in \Sigma$ au moment t, alors l'argument au début de sous-section 2.2 constate que dans un voisinage V_q, le champ vertical est holomorphe à celui de $\frac{\partial}{\partial \mathrm{Re}(z^{m_q})}$ dans un voisiange de $0 \in \mathbb{C}$. Alors la séparatrice entrante γ est adjacent à deux sépatratrice sortante γ_0, γ_1(qui peut être la même si $m_q = 1$), qui par l'hypothèse rencontre l'intérieur de S pour la première fois respectivement aux moments t_0 et t_1; on note les points de rencontre par b_0 et b_1. En choisissant $s < \min\{t, t_0, t_1\}$ posons $a' = Y^{t-s}(a)$, $b_0' = Y^{s-t_0}(b_0)$, $b_1' = Y^{s-t_1}(b_1)$. Alors pour tout $\delta \in (0, s)$ suffisament petit, $\exists \zeta \in (0, s)$ tel que $\forall c \in B(a', \zeta)$ (où le disque $B(a', \zeta)$ est défini par la métrique plat hors de Σ), $Y^{2s}(c) \in B(b_0', \delta) \bigcup B(b_1', \delta)$. En vertu du théorème 2.7, lorsque δ est assez petit l'orbite positive de c rencontre l'intérieur de S, et en plus il existe un voisinage de a dont l'orbite positive de tout point entre dans $B(a', \zeta)$. Ainsi on a montré que Z est ouvert.

Soit $\{a_n\}_{n \leq 0}$ une suite dans Z convergeant vers $a \in M - \Sigma$. On note par t_n le temps de première rencontre avec l'ensemble $\Sigma \bigcup \mathrm{int} S$ de l'orbite positive de a_n. Ces t_n sont bornés par le maximum des valeurs suivantes: *i).* Si $Y^{t_n}(a_n) = q \in \Sigma$ alors t_n ne surpasse pas le temps de première rencontre (ou, disons strictement, la dernière rencontre) avec $\mathrm{int} S$ d'une des séparatrice entrante de q. *ii).* Si $Y^{t_n}(a_n) \in D(T_S^{-1})$, alors t_n ne surpasse pas le temps de premier retour de T^{-1} dans S sur une des composante connexe de $D(T_S^{-1})$. *ii).* Si $Y^{t_n}(a_n) \in S - D(T_S^{-1})$, alors a_n appartient à une séparatrice sortante de $q \in \Sigma$, et il n'y a pas d'autre point de S entre a_n et q dans cette séparatrice. t_n ne surpasse donc pas le temps de première rencontre avec $\mathrm{int} S$ d'une des séparatrice sortante de q. Comme le nombre de ces bornes supérieures est fini, t_n sont borné. Conséquemment on peut supposer $t_n \to t \geq 0$ sans perte de généralité. Si l'orbite positive de a ne rencontre pas un point marqué avant le moment t, $Y^t(a)$ est la limite des $Y^{t_n}(a_n) \in \Sigma \bigcup \mathrm{int} S \subset \Sigma \bigcup S$. Ce dernier est un fermé de M parce que Σ et S le sont (car comme l'image continu d'un intervalle fermé, S est compact dans M qui est de Hausdorff), donc $Y^t(a) \in \Sigma \bigcup S$. Si $Y^t(a)$ n'est pas une extrémité de S, a appartient déjà à Z. Dans le cas contraire, $Y^t(a)$ se trouve sur une séparatrice. Si cette séparatrice est entrante alors l'orbite positive de a aboutit à un point marqué. Si elle est sortante alors par la définition d'un segment bien coupé, a est dans un segment géodésique qui joignant $Y^t(a)$ et un point marqué, dans lequel il n'y a pas de point de S. Donc l'intersection de cette séparatrice sortante avec l'intérieur de S est dans l'orbite positive de a. On a ainsi montré que a appartient toujours à Z, d'où la fermeture de Z.

Etant ouvert et fermé dans l'espace connexe $M - \Sigma$, Z est d'ailleurs évidemment non-vide, donc $Z = M - \Sigma$; ce qui montre la nécessité. $\square$

3.4 Une surface de translation à partir d'un échange d'intervalles

Le but de cette sous-section est de montrer:

Théorème 3.13. *Etant donné un échange d'intervalles linéaire irréductible T, il y a toujours une surface de translation munie d'un segment bien coupé complet S dont l'échange d'intervalles linéaire associé T_S est équivalent à T.*

Définition 3.14. *Soit $(\mathcal{A}, \pi_t, \pi_b)$ une configuration de données combinatoire, un vecteur de suspension est un vecteur $\tau \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ tel que*

$$v_t(\alpha) > 0, \quad \text{si } \pi_t(\alpha) > 1,$$

$$v_b(\alpha) < 0, \quad \text{si } \pi_b(\alpha) > 1,$$

où $v_c(\alpha) := \sum_{\pi_c(\beta)<\pi_c(\alpha)} \tau(\alpha), \forall \alpha \in \mathcal{A}, \forall c \in \{t, b\}$. Il est dit **horizontal** *si $H = 0$ où par définition $H := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \tau(\alpha)$.*

Le sous-ensemble des vecteurs de suspension dans $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ est dit le **cône de suspension** *de la configuration de données combinaitoire $(\mathcal{A}, \pi_t, \pi_b)$, noté $\mathcal{C}(\pi_t, \pi_b)$. Simillairement on a le* **cône de suspension horizontale** *$\mathcal{C}_0(\pi_t, \pi_b)$.*

Remarque. $\mathcal{C}(\pi_t, \pi_b)$ et $\mathcal{C}_0(\pi_t, \pi_b)$ sont convexes et donc connexes par arc s'ils sont non-vides.

Notons toujours $L = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda(\alpha)$. Dans $\mathbb{R}^2$, marquons les points $E_{\pi_t(\alpha)} := (u_t(\alpha), v_t(\alpha))$, $F_{\pi_b(\alpha)} := (u_b(\alpha), v_b(\alpha))$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ et $E_{d+1} := F_{d+1} := (L, H)$. Comme $E_1 = F_1 = (0, 0)$ et touts les autres points sont différents grâce aux conditions posées sur λ et τ, il y a $2d$ points en total. $\forall 1 < k < d + 1$, E_k est dans le demi-plan supérieur et F_k est dans le demi-plan inférieur.

En reliant ces points par $2d$ segments: $E_1E_2...E_{d+1}$ et $F_1F_2...F_{d+1}$, on dit que le vecteur de longueurs λ et celui de suspension τ sont **compatibles** si E_dE_{d+1} n'intersecte aucun $F_kF_{k+1}, k < d$ et F_dF_{d+1} n'intersecte aucun $E_kE_{k+1}, k < d$, c'est-à-dire que ces $2d$ segments entourne un bon polygone plan Ω grâce aux hyothèses faite sur τ.

Remarque. Un vecteur de suspension horizontal est compatible avec tout vecteur de longueurs.

Si λ et τ sont compatibles, notons les cotés du polygone par les symbols $\xi_\alpha = E_{\pi_t(\alpha)}E_{\pi_t(\alpha)+1}$, $\zeta_\alpha = F_{\pi_b(\alpha)}F_{\pi_b(\alpha)+1}$; alors ξ_α et ζ_α s'identifient modulo une translation, ou ont la même longueur et la même pente.

Ensuite, définissons une relation d'entre les sommet de Ω en posant $\forall \alpha \in \mathcal{A}, E_{\pi_t(\alpha)} \approx F_{\pi_b(\alpha)}, E_{\pi_t(\alpha)+1} \approx F_{\pi_b(\alpha)+1}$, i.e. respectivement les sommets gauches et les sommets droites de ξ_α et ζ_α. En étendant cette relation par symmétrie et transitivité, on obtient un certain nombre, disons s, de classes d'équivalence dans $\mathcal{A}$.

Puis recollons ξ_α et ζ_α et identifions les sommets équivalents par $\approx$; ainsi nous obtennons un espace topologique quotient de Ω, noté M. Soit l'ensemble Σ l'image quotient des sommets de Ω. Montrons maintenant que M est une surface de translation dont l'ensemble des points marqués est Σ.

Soit $\sigma : \Omega \mapsto M$ l'application de quotient, alos σ est un homéomorphisme dans l'intérieur de M: $\forall a \in \sigma(\mathrm{int}\Omega)$, il existe un voisinage U_a tel que $\sigma|_{\sigma^{-1}(U_a)}$ soit un homéomorphisme. Si a appartient à l'intérieur d'un coté, alors $\sigma^{-1}(\{a\})$ contient deux points a_ξ, a_ζ respectivement dans ξ_α et ζ_α. $a_\zeta - a_\xi = \vec{\Delta}_\alpha$ avec $\vec{\Delta}_\alpha = (u_{\mathrm{b}}(\alpha) - u_{\mathrm{t}}(\alpha), v_{\mathrm{b}}(\alpha) - v_{\mathrm{t}}(\alpha))$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(a_\xi, 2\epsilon) = [B(a_\xi, 2\epsilon) \cap \Omega] \sqcup [B(a_\xi, 2\epsilon) \cap (\mathrm{int}\Omega - \vec{\Delta}_\alpha)]$. Posons $\sigma' : B(a_\xi, \epsilon) \mapsto M$: $\sigma'(b) = \sigma(b)$ si $b \in B(a_\xi, \epsilon) \cap \Omega$, $\sigma'(b) = \sigma(b + \vec{\Delta}_\alpha)$ sinon. Alors σ' envoie $B(a_\xi, \epsilon)$ homéomorphement dans un voisinage U_a de a. Evidemment les changement locaux des cartes entre les $\{U_a\}_{a \in M - \Sigma}$ sont des translations.

Etudions maintenant ce qui se passe autour d'un point marqué $q \in \Sigma$.

Dans chaque coté η de Ω, dessinons deux petites flèches qui partent respectivement d'un des extremités et pointent vers l'autre. Celle qui part de l'extremité gauches est notée par R^η et l'autre L^η (cela se fait car $\lambda_\alpha > 0, \forall \alpha \in \mathcal{A}$). Lorsque on recolle ξ_α et ζ_α, R^{ξ_α} et $\mathrm{R}^{\zeta_\alpha}$ sont identifiées comme une flèche qu'on note simplement par R^α; de même on a L^α.

Par abus de terme, une semi-droite qui sort d'un sommet de Ω et suit la direction $\frac{\partial}{\partial y}$ dans un angle Ω est appelée une séparatrice sortante; une semi-droite qui suit la direction $\frac{\partial}{\partial y}$ dans un angle de Ω et aboutit à un sommet de Ω est appelée une séparatrice entrante. Donc en chaque $E_i, 1 < i < d+1$ il y a une séparatrice entrante; en chaque $F_i, 1 < i < d+1$ il y a une séparatrice sortante; et en $E_1 = F_1$ et $E_{d+1} = F_{d+1}$ il n'y a aucune séparatrice.

Avec $\sigma^{-1}(\{q\}) = \{S_1, S_2, ..., S_{n_q}\}$, le voisinage de q dans M est construit par recoller i angles le long de leurs cotés. Lorsque ϵ est tellement petit que les disque $B(S_i, 2\epsilon), i = 1, 2, ..., n_q$ soient disjoints, posons $V_q = M \cap \sigma(\sqcup_{i=1,2,...,n_q} B(S_i, \epsilon))$. Definissons une application $\phi_q : V_q \mapsto B(0, \epsilon)$ par $\phi_q(\sigma(a)) = a - S_i$ si $a \in B(S_i, \epsilon)$, ce qui est continûment défini car les points qui sont concernés plusieurs fois sont des points de recollement. Les sections locales hors de q sont évidement des composés d'une translation et d'une carte locale de l'atlas de translation. On va voir que ϕ_q est un revêtement ramifié: $(V_q, q) \mapsto (B(0, \epsilon), 0)$. En effet, dans le recollement près de q, il y a k angles et k cotés, dont chacun est présenté par une flèche. Imaginons qu'il aie une aiguille de longueur ϵ qui tourne dans V_q dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, dont le mouvement angulaire est compté par le changement de direction dans $B(0, \epsilon)$. Alors elle part de la position d'une flèche, traverse une angle qui lui est adjacente, arrive à l'autre flèche qui forme cet angle et entre dans l'angle suivant...; ainsi elles parcourt toutes les angles et toutes les flèche et revient à la position initiale. Donc l'angle totale qu'elle a tourné est un multiple de 2π, noté $2m_q\pi$. Elle est alors passé par m_q séparatrices sortantes et m_q séparatrices sortantes. Tout point de $B(0,\epsilon) - \{0\}$ est touché m_q fois par la projection ϕ_q, donc ϕ_q est un revêtement d'indice m_q hors de q. En remarquant que $\{\phi_q^{-1}(B(0,r))\}_{0<r<\epsilon}$ forment une base locale en la singularité q, on a montré que ϕ_q est un revêtement ramifié d'indice m_q. Donc on a montré que (M,Σ) est une surface de translation, et la notion "séparatrice" est ainsi justifiée.

Remarque 3.15. *Expliquons maintenant comment déterminer les m_q à partir de l'échange d'intervalles. En effet si on suit l'anguille tournante il y a trois type possible de angles: i). Une angle qui commence par une flèche de type* R *et termine par une* L *au sens de l'anguille de montre; ce type se trouve forcément en un sommet $E_k, 1 < k < d+1$. ii). Une angle qui commence par une flèche de type* L *et termine par une* R*, en un sommet $F_k, 1 < k < d+1$. iii). Une angle qui commence et termine par deux flèches de même type. Ce type n'existe qu'à $E_1 = F_1$ et $E_{d+1} = F_{d+1}$.*

D'après cette discussion, on définit une application dans les flèche qui sigifie les relation de voisinage dans le sens contraire des anguilles d'un montre. Posons $\theta(\mathrm{R}^\alpha) = \mathrm{L}^{\pi_\mathrm{t}^{-1}(\pi_\mathrm{t}(\alpha)+1)}$ si $\pi_\mathrm{t}(\alpha) < d$, $\theta(\mathrm{L}^\alpha) = \mathrm{R}^{\pi_\mathrm{b}^{-1}(\pi_\mathrm{b}(\alpha)-1)}$ si $\pi_\mathrm{b}(\alpha) > 1$. Pour $\alpha = \pi_\mathrm{t}^{-1}(d)$, on fait la convention $\mathrm{R}^\alpha = \mathrm{R}^\beta$ où $\beta = \pi_\mathrm{b}^{-1}(d)$; similairement si $\alpha' = \pi_\mathrm{b}^{-1}(1)$, on fait la convention $\mathrm{L}^{\alpha'} = \mathrm{L}^{\beta'}$ où $\beta' = \pi_\mathrm{t}^{-1}(1)$. Après ces identifications il nous reste $2d-2$ flèches, d'entre lesquelles l'action de θ forme s cycles, tous de longueurs paires (car θ change toujours le type de flèche entre L *et* R*). Chaque cycle correspond à un point marqué q de M; la cycle est de longueur $2m_q$, parce que chaque action de θ signifie une traversée d'une séparatrice, ou une augmentation de π en angle. D'où l'égalité*

$$d - 1 = \sum_{q\in\Sigma} m_q \ .$$

Nous nous intéressons maintenant au champ verical $\frac{\partial}{\partial y}$ dans M. Sans perte de généralité, supposons $H \geq 0$, alors avec $\beta = \pi_\mathrm{b}^{-1}(1)$, $\tau(\beta) > 0$. Tout semgent ξ_α, ζ_α n'intersecte pas l'axe horizontale sauf ζ_β. Considérons ce point d'intersection $a_\zeta = F_{d-1} + \mu(\lambda(\beta), \tau(\beta)) = (u_\mathrm{b}(\beta) + \mu\lambda(\beta), 0)$ où $\mu = \frac{-v_\mathrm{b}(\beta)}{\tau(\beta)}$. a_ζ est identifié à $a_\xi = E_{\pi_\mathrm{t}(\beta)} + \mu(\lambda(\beta), \tau(\beta))$ dans le segment ξ_β. En notant $\tilde{E} = a_\xi + ((1-\mu)\lambda(\beta), 0)$ considérons la reunion des segments $E_0 a_\zeta$ et $a_\xi \tilde{E}$, notée S'. Après le recollement en a_ζ et a_ξ, $S = \sigma(S')$ est un segment géodésique de la direction $\frac{\partial}{\partial x}$ dans M. Il est bien coupé car E_0 lui même est envoyé en un point marqué dans Σ, et $Y^{(1-\mu)\tau(\beta)}(\sigma(\tilde{A})) = \sigma(Y^{(1-\mu)\tau(\beta)}(A)) = \sigma(F_{\pi_\mathrm{t}(\beta)+1})$ est un point marqué lorsque il n'y a pas d'autre point de S' sur le segment joignant $\tilde{A}$ et $F_{\pi_\mathrm{t}(\beta)+1}$.

Alors le premier retour du flot vertical dans int$S$ determine un échange d'intervalles linéaire T_S selon le théorème 3.10. Les singularité de T_S sonts les dernières intersections des séparatrices entrantes avec int$S$, dont il y a $d-1$, respectivement les images de l'ensemble $\{(u_{\mathrm{t}}(\alpha),0)|\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)>0, u_{\mathrm{t}}(\alpha)<u_{\mathrm{b}}(\beta)+\mu\lambda(\beta)\}\cup\{(u_{\mathrm{t}}(\alpha),0)-(a_\zeta-a_\xi)|\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)>0, u_{\mathrm{t}}(\alpha)\geq u_{\mathrm{b}}(\beta)+\mu\lambda(\beta)\}$. Les singularité de T_S^{-1} sonts les première intersections des séparatrices sortantes avec int$S$, dont il y a $d-1$, respectivement les images des $(u_{\mathrm{b}}(\alpha),0), \pi_{\mathrm{b}}(\alpha)>0$. Ainsi on a vu qu'après le recollement l'échange d'intervalle T_S sur S est équivalent à T sur $[0,L]$. En plus S est complet en vertu de la remarque au-dessous de la définition 3.11.

Afin de montrer le théorème 3.13, la seule brique qui nous manque est le:

Lemme 3.16. *Toute donnée combinatoire irréductible permet un vecteur de suspension horizontal.*

Preuve. Posons $\tau(\alpha)=\pi_{\mathrm{b}}(\alpha)-\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)$, alors $H=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\pi_{\mathrm{b}}(\alpha)-\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)=\frac{d(d+1)}{2}-\frac{d(d+1)}{2}=0$. $v_{\mathrm{t}}(\alpha)=\sum_{i<\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)}(\pi_{\mathrm{b}}\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(i)-i)$; ce qui est strictment positif lorsque $\pi_{\mathrm{t}}(\alpha)>1$ en vertu de l'irréductibilité. Symmétriquement $v_{\mathrm{b}}(\alpha)<0$ lorsque $\pi_{\mathrm{b}}(\alpha)>1$. □

Comme S est un segment bien coupé complet, le corollaire ci-dessous est trivial.

Corollaire 3.17. *La surface de translation (M,Σ) construit à partir de l'échange d'intervalles T est sans liaison si et seulement si T l'est.*

4 Diagrammes de Rauzy

4.1 Opérations de Rauzy-Veech

Soit $(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}},\lambda_{\mathrm{t}},\lambda_{\mathrm{b}},T)$ un échange d'intervalles irréductible sans liaison sur l'intervalle $I=[0,L]$. $d:=\#\mathcal{A}$, $\alpha_{\mathrm{t}}:=\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d)$, $\alpha_{\mathrm{b}}:=\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d)$, alors l'absence de liaison affirme que $\lambda_{\mathrm{t}}(\alpha\mathrm{t})\neq\lambda_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}})$ lorsque l'irréductibilité affirme que $\alpha_{\mathrm{t}}\neq\alpha_{\mathrm{b}}$.

Supposons d'abords que $\lambda_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}})<\lambda_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}})$, étudions l'application de premier retour T' de T dans l'intérieur du sous-intervalle $I':=[0,L']:=[0,u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}})]$. Lorsque $T(x)<L'$, T' coincïde avec T en x. Si $T(x)=L'$, alors T' n'est pas défini en x car L est une singularité de T. Si $T(x)>L'$, alors T' coincïde avec T^2 en x car T envoie $(L',L)=D_{\alpha_{\mathrm{t}}}(T)$ dans la partie $I-I_{\alpha_{\mathrm{b}}}(T)\subset I'$. Ainsi on a vu que l'application T' a le même nombre de singularités que T (la singularité L' est remplacée par $T^{-1}(L')$) et est localement un homéomorphisme dans son domaine de définition, d'où on conclut que T' est un échange d'intervalles.

Prennons toujours $\mathcal{A}$ comme alphabet pour T': les intervalles dans $I(T)$ gardent leurs lettres si ils ne sont pas touchés par le changement d'échange lorsque l'intervalle $[u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}),L']$ hérite la lettre α_{b} de $[u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}),L]$.

On formalise:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}' &= \mathcal{A} \\
D_\alpha(T') &= \begin{cases} D_\alpha(T) & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_{\mathrm{t}}, \alpha_{\mathrm{b}} \\ T^{-1}(D_{\alpha_{\mathrm{t}}}(T)) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{t}} \\ T^{-1}((u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}), u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}}))) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{b}} \end{cases} \\
I_\alpha(T') &= \begin{cases} I_\alpha(T) & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_{\mathrm{b}} \\ (u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}), u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}})) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{b}} \end{cases} \\
T'(x) &= \begin{cases} T(x) & \text{si} \quad x \in D_\alpha(T'), \alpha \neq \alpha_{\mathrm{t}} \\ T(T(x)) & \text{si} \quad x \in D_{\alpha_{\mathrm{t}}}(T') \end{cases} \\
\pi'_{\mathrm{t}}(\alpha) &= \begin{cases} \pi_{\mathrm{t}}(\alpha) & \text{si} \quad \pi_{\mathrm{t}}(\alpha) \leq \pi_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}}) \\ \pi_{\mathrm{t}}(\alpha)+1 & \text{si} \quad \pi_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}}) < \pi_{\mathrm{t}}(\alpha) < d \\ \pi_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}})+1 & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{t}} \end{cases} \\
\pi'_{\mathrm{b}}(\alpha) &= \pi_{\mathrm{b}}(\alpha)\ , \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Cette opération sur la configuration de données combinatoire b : $(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}) \mapsto (\mathcal{A}, \pi'_{\mathrm{t}}, \pi'_{\mathrm{b}})$ s'appelle **l'opération de Rauzy-veech de type bottom**. Remarquons qu'elle ne dépend que des données combinatoires elles-mêmes. D'ailleurs, b est inversible: $(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}})$ peut être déterminé par $(\mathcal{A}, \pi'_{\mathrm{t}}, \pi'_{\mathrm{b}})$; notons par b^{-1} l'inverse.

$(\mathcal{A}, \pi'_{\mathrm{t}}, \pi'_{\mathrm{b}})$ reste irréductible; en effet, si $0 < k \leq \pi_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}})$ alors ${\pi'}_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, ..., k\}) = \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, ..., k\}) \neq \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, ..., k\}) = {\pi'}_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, ..., k\})$, sinon $\alpha_{\mathrm{b}} \in {\pi'}_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, ..., k\}) - {\pi'}_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, ..., k\})$ lorsque $k < d$.

T' est sans liaison, car par défintion de T', toute liaison de T' produit une liaison de T.

Un argument symmétrique assure que lorsque $\lambda_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}}) > \lambda_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}})$ on a aussi un nouvel échange d'intervalle T' sur $I' := [0, L'] := [0, u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}})]$ qui est irréductible et sans liaison:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}' &= \mathcal{A} \\
I_\alpha(T') &= \begin{cases} I_\alpha(T) & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_{\mathrm{b}}, \alpha_{\mathrm{t}} \\ T(I_{\alpha_{\mathrm{b}}}(T)) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{b}} \\ T((u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}}), u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}))) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{t}} \end{cases} \\
D_\alpha(T') &= \begin{cases} D_\alpha(T) & \text{si} \quad \alpha \neq \alpha_{\mathrm{t}} \\ (u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{t}}), u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}})) & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{t}} \end{cases} \\
T'(x) &= \begin{cases} T(x) & \text{si} \quad x \in D_\alpha(T'), \alpha \neq \alpha_{\mathrm{b}} \\ T(T(x)) & \text{si} \quad x \in D_{\alpha_{\mathrm{b}}}(T') \end{cases} \\
\pi'_{\mathrm{b}}(\alpha) &= \begin{cases} \pi_{\mathrm{b}}(\alpha) & \text{si} \quad \pi_{\mathrm{b}}(\alpha) \leq \pi_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{t}}) \\ \pi_{\mathrm{b}}(\alpha) + 1 & \text{si} \quad \pi_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{t}}) < \pi_{\mathrm{b}}(\alpha) < d \\ \pi_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{t}}) + 1 & \text{si} \quad \alpha = \alpha_{\mathrm{b}} \end{cases} \\
\pi'_{\mathrm{t}}(\alpha) &= \pi_{\mathrm{t}}(\alpha) \ , \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

On a de même la notation t qui désigne **l'opération de Rauzy-veech de type top**, d'inverse t^{-1}.

Définition 4.1. *Le* **perdant** *d'une opération de Rauzy-Veech est la lettre* α_{c} *où* $\mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}$ *est le type autre que celui de l'opération.*

Le **gagnant** *d'une opération de Rauzy-Veech est la lettre* α_{c} *où* $\mathrm{c} \in \{\mathrm{t}, \mathrm{b}\}$ *est le type de l'opération.*

Le nouvel échange d'intervalles étant irréductible et sans liaison, on peut répéter l'opération de Rauzy-Veech infiniement.

4.2 Définition des diagrammes de Rauzy

Etant donnée un alphabet $\mathcal{A}$, la collection de toute configuration de données combinatoire irréductible, notée $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, devient un graphe orienté lorsque on dessine une arête marquée la lettre t sortant de chaque $(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi'_{\mathrm{b}})$ qui pointe vers $\mathrm{t}.(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}})$, ainsi que une arête marquée b de destination $\mathrm{b}.(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}})$ sortant du même sommet.

Définition 4.2. *Un diagramme de Rauzy d'alphabet* $\mathcal{A}$ *est une composante connexe du graphe* $\mathcal{G}(\mathcal{A})$.

Il est facile de voir que dans un diagramme de Rauzy, tout sommet est la source de exactement deux arêtes, respectives de type t et b; ainsi que la destination de exactement deux arêtes, une de chaque type aussi.

Observons qu'une opération de Rauzy-Veech ne modifie pas les premières lettres dans les ordres top/bottom, donc $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1)$ et $\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(1)$ sont deux invariants dans un diagrammes de Rauzy. Mais ils ne sont pas les seuls: on va voir des autres invariants ci-dessous.

On a déjà vu que dans la surface de translation (M,Σ) construite à partir d'un échange d'intervalle $(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}},\lambda,T)$ et un vecteur de suspension τ, le nombre de points marqués $s=\#\Sigma$ et leurs indices de ramification $\{m_q\}_{q\in\Sigma}$ sont respectivement déterminés par le nombre de cycles de l'action θ sur l'ensemble de flèches $F_{(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})}$ et leurs longueurs. Ici $F_{(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})}=\{\mathrm{L}^\alpha,\mathrm{R}^\alpha|\alpha\in\mathcal{A}\}$ avec la convetion $\mathrm{L}^{\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1)}=\mathrm{L}^{\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(1)}$, $\mathrm{R}^{\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d)}=\mathrm{R}^{\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d)}$; θ est explicitement définie dans la remarque 3.15.

Théorème 4.3. *$s=\#\Sigma$ et $\{m_q\}_{q\in\Sigma}$ sont des invariants dans un diagramme de Rauzy.*

Preuve. Démontrons qu'une opération de type t ne change pas ses quantités, lorsque la preuve est pareille pour b.

Notons comme plus haut $\alpha_{\mathrm{c}}=\pi_{\mathrm{c}}^{-1}(d),\mathrm{c}=t,b$. Si $\pi_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{t}})=d-1$ alors $\mathrm{t}.(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})=(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})$. Sinon notons $\beta=\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(\pi_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{t}})+1),\gamma=\pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d-1)$ (β et γ peuvent coincïder mais ceci ne nous empêche pas.)

Alors dans les cycles de l'action de θ dans $F_{(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})}$, nous avons:

$$...\to\mathrm{L}^\beta\to\mathrm{R}^{\alpha_{\mathrm{t}}}=\mathrm{R}^{\alpha_{\mathrm{b}}}\to...,$$

$$...\to\mathrm{L}^{\alpha_{\mathrm{b}}}\to\mathrm{R}^\gamma\to...$$

Et dans les cycles de $\mathrm{t}.F_{(\mathcal{A},\pi_{\mathrm{t}},\pi_{\mathrm{b}})}$, lorsque les autres actions de θ ne sont pas modifiées, ces parties sont reorganisées dans les forme:

$$...\to\mathrm{L}^\beta\to\mathrm{R}^{\alpha_{\mathrm{b}}}\to...,$$

$$...\to\mathrm{L}^{\alpha_{\mathrm{b}}}\to\mathrm{R}^{\alpha_{\mathrm{t}}}=\mathrm{R}^\gamma\to...$$

Comme le symbol $=$ n'est pas compté dans la longueur des cycles, les quantités en question sont préservées. □

Corollaire 4.4. *Le genre des surfaces de translation, construites à partir de des données combinatoires avec des bons vecteurs de translation et de suspension, est un invariant dans un diagramme de Rauzy.*

Preuve. Quand on contruit une surface de translation à partir d'un échange d'intervalles linéaire irréductible, le segment de base est bien coupé. Donc $g=\frac{1}{2}(\sum_{q\in\Sigma}(m_q-1)+2)=\frac{1}{2}(\sum_{q\in\Sigma}m_q-s+2)=\frac{1}{2}(d-s+1)$ est invariant par les opération de Rauzy-Veech. □

4.3 Dégénérence de Rauzy

Cette partie répond à la question suivante: qu'est-ce qui arrive à un diagramme de Rauzy si on enlève certaines lettres de l'alphabet?

Définition 4.5. *Soit $\mathcal{R}$ un diagramme de Rauzy de l'alphabet $\mathcal{A}$. Etant donné un sous-ensemble propre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, de cardinal strictement supérieur à 1, une arête de $\mathcal{R}$ est dit une* $\mathcal{B}$**-arête** *si son gagnant appartient à $\mathcal{B}$. On classifie les sommets de $\mathcal{R}$ dans trois catégories:*
i). **sommets essentiels***: $\{(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}) | \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}, \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}\}$;*
ii). **sommets intermédiaires***: $\{(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}) | \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}, \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d) \notin \mathcal{B}\} \cup \{(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}) | \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \notin \mathcal{B}, \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}\}$;*
iii). **sommets triviaux***: $\{(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}) | \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \notin \mathcal{B}, \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d) \notin \mathcal{B}\}$.*

En un sommet essentiel/intermédiaire/trivial, il y a respectivement 2/1/0 $\mathcal{B}$-arêtes sortantes et 2/1/0 $\mathcal{B}$-arêtes entrantes.

Faisons toutes les longueurs $\{\lambda(\alpha)\}_{\alpha \notin \mathcal{B}}$ tendre vers 0 en gardant les longeurs des autres intervalles constantes. Maintenant toute arête n'a plus de sens s'il n'est pas une $\mathcal{B}$ arête; on l'éfface tout simplement. Alors un sommet trivial n'garde plus aucune arête sortante ou entrante, on efface aussi ce sommet isolé. Un sommet intermédiaire π a encore une arête entrante e ainsi qu'une sortante s de même type. Mais l'opération de Rauzy-Veech corréspond à s est de déplacer le perdant en lui avançant par un certain nombre de places. Comme ce perdant n'appartient pas à $\mathcal{B}$ et donc est de longueur d'intervalle nulle, au niveau d'échange d'intervalle cette opération ne fait rien. Donc ce qu'on fait dans ce cas est d'enlever π (ou, dan un autre sens, de l'identifier à la destination de s), et de combiner e et s comme une seule arête du même type, encore notée e, qui pointe de la source de e à la destination de s. En effet, si on part d'un sommet essentiel et répéter un seul type d'opération de Rauzy, on parcourt une chaîne de sommets intermédiares avant de venir à un autre sommet essentiel et toutes les arêtes qu'on passe sont des $\mathcal{B}$-arêtes du même gagnant; ainsi on combine toutes ces arêtes dans une seule, de la même type et du même gagant. Donc il y a encore 2 arêtes sortantes et 2 arêtes entrantes en tout sommet essentiel.

Après avoir fait tout cela, nous obtenons un nouveau graphe $\mathcal{G}'$, dans lequel il n'y a plus que les sommets essentiels. Ayant déjà annulé les intervalles qui leur correspondent, ensuite on supprime toute lettre ne pas appartenant à B: remplace tout sommet essentiel $(\mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}})$ par $(\mathcal{B}, \tilde{\pi}_{\mathrm{t}}, \tilde{\pi}_{\mathrm{b}})$ où $\tilde{\pi}_{\mathrm{t}}, \tilde{\pi}_{\mathrm{b}}$ sont les ordres induits dans $\mathcal{B}$.

Définition 4.6. *Soit $(\mathcal{X}, \hat{\pi}_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}_{\mathrm{b}})$ une configuration de données combinatoires quelconque, son* **suffixe irréductible** *est par définition les données combinatoires $(\mathcal{Y}, \hat{\pi}'_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}'_{\mathrm{b}})$, qui sont définies par: $K = \max\{k | 0 \leq k < \#\mathcal{X}, \hat{\pi}_{\mathrm{t}}^{-1}(\{1, .., k\}) = \hat{\pi}_{\mathrm{b}}^{-1}(\{1, .., k\})\}$, $\mathcal{Y} = \hat{\pi}_{\mathrm{t}}^{-1}(\{K, K+1, .., \#\mathcal{X}\}$ et $\hat{\pi}'_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}'_{\mathrm{b}}$ sont les ordres respectivement induits par $\hat{\pi}_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}_{\mathrm{b}}$.*

Ce suffixe est par définition irréductible. Avec $\hat{\pi}''_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}''_{\mathrm{b}}$ les ordres induits, $(\mathcal{X} - \mathcal{Y}, \hat{\pi}''_{\mathrm{t}}, \hat{\pi}''_{\mathrm{b}})$ est appelé le **préfixe maximal**.

Pour toute arête a dans $\mathcal{G}'$, sans perte de généralité supposée de type t, de source $\pi = (\mathcal{B}, \tilde{\pi}_{\mathrm{t}}, \tilde{\pi}_{\mathrm{b}})$, de destination $\pi^* = (\mathcal{B}, \tilde{\pi}^*_{\mathrm{t}}, \tilde{\pi}^*_{\mathrm{b}})$, de gagnant α_{t}. Alors la séparation entre le préfixe maximal et le suffixe irréductible de π paraît forcément devant la lettre α_{t} dans la ligne bottom. Mais ce que a fait sur l'ordre bottom est induit par une chaîne d'opérations de Rauzy-Veech, toutes du même gagnant α_{t}, donc ne déplace que les éléments derrière α_{t} dans l'ordre bottom et ne touche pas le préfixe maximal. En conséquence le préfixe maximal de π' contient celui de π, mais il se trouve aussi devant α_{t} dans la ligne bottom. Donc le suffixe irréductible de π' a le même alphabet que celui de π'. En plus, la manière de laquelle on définit une arête entre deux sommets essentiels assure que a agit comme une opération de Rauzy-Veech de type t sur le suffixe irréductible de π'. Finalement on remarque que ce suffixe est non-vide. En effet, car $\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}, \pi_{\mathrm{b}}^{-1}(d) \in \mathcal{B}$, $\tilde{\pi}_{\mathrm{t}}^{-1}(d), \tilde{\pi}_{\mathrm{b}}^{-1}(d)$ leur sont égaux. Donc $\tilde{\pi}_{\mathrm{t}}^{-1}(d) \neq \tilde{\pi}_{\mathrm{b}}^{-1}(d)$ et on y déduit que le suffixe est de longueur au moins 2.

Soit $\mathcal{R}'$ une composante connexe de $\mathcal{G}'$, alors la discussion plus haut montre que tout sommet dans $\mathcal{R}'$ a le même alphabet $\mathcal{C}$ de suffixe irréductible et que toute arête agit comme une opération de Rauzy-Veech sur un de ces suffixes. En plus, tout sommet possède 2 arêtes sortantes ainsi que 2 arêtes entrantes, partagées entre les deux types. Donc $\mathcal{R}'$ est isomorphe à un diagramme de Rauzy d'un sous-alphabet $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

Ainsi en effaçant une partie de l'alphabet on transforme un diagramme de Rauzy en plusieurs diagrammes plus petits; ce qui s'appelle la dégénérence de Rauzy.

4.4 L'aspect géométrique et les groupes modulaires

Expliquons maintenant la signification d'une opération de Rauzy-Veech au niveau de surfaces de translation.

Lemme 4.7. *Soit $X_1X_2X_3$ et $Y_1Y_2Y_3$ deux triangles dans le plan, alors il existe un homéomorphisme linéaire $\phi_{Y_1,Y_2,Y_3} : X_1X_2X_3 \mapsto Y_1Y_2Y_3$ préservant l'orientation qui:*
i). est en tout point continu en Y_1, Y_2, Y_3;
ii.) envoie X_i en Y_i, $i = 1, 2, 3$;
iii.) envoie X_iX_j linéairement dans Y_iY_j, $i, j = 1, 2, 3$.

Preuve. $\phi_{Y_1,Y_2,Y_3}(\sum_{i=1}^3 u_iX_i) := \sum_{i=1}^3 u_iX_i$, où $\sum_{i=1}^3 u_i = 1$. □

Notons par $\mathcal{P}_n = \{X_1X_2...X_n\}$ la collection de tout polygone plan propre. Elle est muni de la topologie déduite de $(X_1, X_2, ..., X_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$. Donc un arc dans $\mathcal{P}_n$ est une collection de polygone $X_1(t)X_2(t)...X_n(t)_{t\in[a,b]}$ où $X_i(t)$ est continu pour tout i.

Théorème 4.8. *Soit* $P(t) = X_1(t)X_2(t)...X_n(t), t \in [a,b]$ *un arc dans* $\mathcal{P}_n$*, alors* $\forall a \leq r \leq s \leq b$ *il existe des homéomorphismes* $\Psi^{r,s} : P(r) \mapsto P(s)$ *préservant l'orientation du plan tels que:*
i). En tout point de $P(r)$*,* $\Psi^{r,s}$ *soit continu en* s*;*
ii.) $\Psi^{r,s}(X_i(r)) = X_i(s)$*,* $i = 1,2,...,n$*;*
iii.) $\Psi^{r,s}$ *envoie* $X_i(r)X_j(s)$ *linéairement dans* $Y_i(r)Y_j(s)$*,* $i,j = 1,2,...,n$*;*
iv.) $\Psi^{r,s} \circ \Psi^{w,r} = \Psi^{w,s}$*,* $\forall w \leq r \leq s$*.*
v.) La famille $\{\Psi^{0,s}(x)\}_{x\in P(0)}$ *est équicontinue en* s *si les applications* $X_1(t)$*,*$X_2(t)$*,...,*$X_n(t)$ *sont Lipschitz continues.*

Preuve. $\forall c \in [a,b]$, il existe une triangulation $\Gamma(c)$ de $P(c)$ telle que tout sommet d'un triangle décomposé soit un sommet ou un point intérieur de $P(c)$. Il y a un voisinage I_c de c tel que pour $t \in I_c$, $\Gamma(t)$ reste une triangulation de $P(t)$ si on remplace $X_i(c)$ par $X_i(t)$ sans toucher les points intérieurs. $[a,b]$ est couvert par un nombre fini de tels voisinage. On peut supposer que il existe $a = d_1 < d_2 < ... < d_n = b$ tel que chaque $[d_k, d_{k+1}]$ soit contenu dans un certain I_{c_k}. Alors en recollant des homéomorphismes sur les triangles, le lemme précédent assure que le théorème est vrai pour le sous-arc $t \in [d_k, d_{k+1}]$. On définit $\Psi^{r,s} = \Psi^{d_m,s} \circ \Psi^{d_{m-1},d_m} \circ ... \circ \Psi^{r,d_l}$ si $r < d_l \leq d_{l+1} \leq ... \leq d_m < s$.

v) est vrai parce qu'il ne s'agit que d'un nombre fini d'intervalles et un nombre fini de triangulisations qui sont équicontinues en s en tout point. En effet la famille d'homéomorphismes dans une triangulisation n'est autre qu'une moyenne finie des fonctions Lipschitz continues, donc équicontinue. □

Remarquons le fait que deux homéomorphismes du disque fermé $f, g : D^2 \mapsto D^2$ fixant le bord S^1 sont homotopes dans la paire d'espace (D^2, K) par $h_u(x) = uf(x) + (1-u)g(x), u \in [0,1]$ où K est une partie quelconque de S^1. Alors les conditions *ii.)* et *iii.)* du théorème assurent:

Lemme 4.9. *Soient* $P(t)$ *et* $P'(t)$ *deux arcs dans* $\mathcal{P}_n$ *tels ques* $P(0) = P'(0)$*,* $P(1) = P'(1)$*. Si* $\{\Psi^{r,s}\}_{0\leq r\leq s\leq 1}$ *et* $\{\Psi'^{r,s}\}_{0\leq r\leq s\leq 1}$ *sont les deux familles de homéomorphismes respectivement associées à* $P(t)$ *et* $P'(t)$*, alors* $\Psi^{0,1} : (P(0), \Sigma(0)) \mapsto (P(1), \Sigma(1))$ *et* $\Psi'^{0,1} : (P(0), \Sigma(0)) \mapsto (P(1), \Sigma(1))$ *sont homotopes où* $\Sigma(t)$ *est l'ensemble des sommets de* $P(t)$*,* $\forall t$*.*

Etant donné une configuration de données combinatoires $\pi = \mathcal{A}, \pi_{\mathrm{t}}, \pi_{\mathrm{b}}$ irréductible, alors on a vu qu'à partir de tout couple compatible d'un vecteur de longueurs et d'un vecteur de suspension $\Lambda = (\lambda, \tau)$ une surface de translation $(M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$ peut être construite en recollant le long du bord d'un polygone plan $\Omega_{\Lambda,\pi}$.

Lemme 4.10. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}(\pi)$ des couples $\Lambda = (\lambda, \tau)$ compatibles est connexe par arc. En plus entre deux points quelconques il y a un arc que est Lipschitz continu au sens de $C([0,1], \mathbb{R}^{2d})$.*

Preuve. Pour π irréductible il existe un vecteur de suspension horizontal τ_0. $\forall (\lambda_1, \tau_1), (\lambda_2, \tau_2) \in \tilde{\mathcal{C}}(\pi)$, on a $\forall (\lambda_1, \tau_0), (\lambda_2, \tau_0) \in \tilde{\mathcal{C}}(\pi)$. Comme $\mathcal{C}_0(\pi)$ est convexe, les trois segments $(\lambda_1, u\tau_1 + (1-u)\tau_0), (v\lambda_1 + (1-v)\lambda_2, \tau_0), (\lambda_2, w\tau_0 + (1-w)\tau_2)$ forment un arc joignant (λ_1, τ_1) et (λ_2, τ_2) dans $\tilde{\mathcal{C}}(\pi)$. Cet arc est linéaire par morceau donc Lipschitz continu. □

Comme les positions des sommets de $\Omega_{\Lambda,\pi}$ sont continus en Λ, le corollaire suivant est immédiat:

Corollaire 4.11. $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \tilde{\mathcal{C}}(\pi)$, *il existe un arc* $\{\Omega_{\Lambda(t),\pi}\}_{t\in[0,1]}$ *dans* $\mathcal{P}_n$ *joignant* $\Omega_{\Lambda_1,\pi}$ *à* $\Omega_{\Lambda_2,\pi}$.

Couplant ce corollaire avec le théorème 4.8, on a mieux:

Corollaire 4.12. $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \tilde{\mathcal{C}}(\pi)$, $\forall 0 \le r \le s \le 1$ *il existe un arc* $\{\Lambda(t)\}_{t\in[0,1]}$ *dans* $\tilde{\mathcal{C}}(\pi)$, *et des homéomorphismes* $\Phi^{r,s} : (M_{\Lambda(t),\pi}, \Sigma_{\Lambda(t),\pi})$ *préservant l'orientation canonique de* M *et envoyant un point marqué en le point marqué correspondant tels que:* $\Phi^{r,s} \circ \Phi^{w,r} = \Phi^{w,s}$, $\forall w \le r \le s$.

Soit Λ un couple compatible pour les cordonnées combinatoires π, on dit que Λ est **fortement compatible** si dans le polygone $\Omega_{\Lambda,\pi} = E_1E_2...E_dE_{d+1}F_dF_{d-1}...F_1$, le diagonal E_dF_d n'intersecte aucun coté. Notons toujour $\alpha_{\mathrm{t}} = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(d)$, $\alpha_{\mathrm{b}} = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(b)$, alors on a:

Lemme 4.13. *L'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{t}}(\pi)$ des couples fortements compatibles qui satisfie $\lambda(\alpha_{\mathrm{t}}) > \lambda(\alpha_{\mathrm{b}})$ est non-vide et connexe par arc Lipschitz continu. De même il y a $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{b}}(\pi)$ qui est non-vide est connexe par arc Lipschitz continu.*

Preuve. Pour montrer la première moitié il suffit de modifie $\lambda(\alpha_{\mathrm{t}})$ afin que $\epsilon = \lambda(\alpha_{\mathrm{t}}) - \lambda(\alpha_{\mathrm{b}}) \to 0$ soit positif et tellement petit en valeur absolute que $\dfrac{\tau(\alpha_{\mathrm{b}}) - \tau(\alpha_{\mathrm{t}})}{\lambda(\alpha_{\mathrm{t}}) - \lambda(\alpha_{\mathrm{b}})}$ soit plus grand que les valeurs absolutes des pentes de touts les cotés E_kE_{k+1} dans le demi-plan supérieur. Pour la deuxième partie c'est la même chose.

Pour la connexité par arc, notons que $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{t}}(\pi)$ sont reliés par un arc Lipschitz continu $\{\Lambda(t)\}_{t\in[0,1]}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}(\pi)$. Chosissons un ϵ uniformément assez petit pour que tout $\Lambda(t)$ devienne un couple $\Lambda^\epsilon(t)$ fortement compatible satisfie la condition de type t après avoir été modifié comme précédent. Alors l'arc joignant les deux couple dans $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{t}}(\pi)$ est formé par les trois morceaux $\{u\Lambda_1 + (1-u)\Lambda^\epsilon(0)\}$, $\{\Lambda^\epsilon(t)\}$ et $\{v\Lambda^\epsilon(1) + (1-v)\Lambda_2\}$. Pour la continuité lipschitzienne, il ne faut étudier le morceau $\{\Lambda^\epsilon(t)\}$ car les deux autres sont affines. $\{\Lambda^\epsilon(t)\}$ vient de $\{\Lambda(t)\}$ en remplaçant $\lambda(\alpha_\mathrm{t})(t)$ par $\lambda(\alpha_\mathrm{b})(t)+\epsilon$. Cette opération multiplie la constante de Lipschitz par deux au plus. $\square$

Faisons varier un couple fortements compatibles satisfaisant $\lambda(\alpha_\mathrm{t}) > \lambda(\alpha_\mathrm{b})$ dans un voisinage assez petit, (cela est possible car toutes les conditions imposées pour définir un couple fortement compatible sont des conditions ouvertes. Le théorème 3.6 assure sans difficulté le corollaire suivant.

Corollaire 4.14. *Pour toute configuration de données combinatoires π, il existe un couple fortement compatible sans liaison Λ_t qui satisfie $\lambda(\alpha_\mathrm{t}) > \lambda(\alpha_\mathrm{b})$. De même il existe un couple fortement compatible sans liaison Λ_b qui satisfie $\lambda(\alpha_\mathrm{t}) > \lambda(\alpha_\mathrm{b})$.*

Finalement on peut regarder une opération de Rauzy, de type b par exemple, qui agit sur π et obient un nouvel sommet $\pi' = \mathrm{b}.\pi$. Etudions ce qui se passe.

Remarque 4.15. *Prennons le couple fortement compatible (pas forcément sans liaison) Λ_b dans $\tilde{\mathcal{C}}_\mathrm{b}(\pi)$, à partir duquel on construit un polygone $\Omega_{\Lambda_\mathrm{b},\pi}$, puis une surface de translation $(M_{\Lambda_\mathrm{b},\pi}, \Sigma_{\Lambda_\mathrm{b},\pi})$. Par définition de compatibilité forte, on peut couper le triangle $E_dE_{d+1}F_d$, le translater et recoller au-dessus du coté $E_{\pi_\mathrm{t}(\alpha_\mathrm{b})}E_{\pi_\mathrm{t}(\alpha_\mathrm{b})+1}$ le long de l'ancien coté F_dE_{d+1}. Ainsi on construit un nouveau polygone qui correspond à la configuration π'. Au niveau de vecteur de longueur, ceci a fait exactement ce qu'on a raconté dans les équations (1); au niveau de vecteur de suspension, ceci correspond à la modification $\tau'(\alpha_\mathrm{b}) = \tau(\alpha_\mathrm{b}) - \tau(\alpha_\mathrm{t})$ en préservant toutes les autres suspensions. Donc on peut noter ce nouveau polygone par $\Omega_{\Lambda^*_\mathrm{b},\pi'}$. Remarquons ici que la surface de translation $(M_{\Lambda^*_\mathrm{b},\pi'}, \Sigma_{\Lambda^*_\mathrm{b},\pi'})$ est canoniquement homéomorphe à $(M_{\Lambda_\mathrm{b},\pi}, \Sigma_{\Lambda_\mathrm{b},\pi})$, car la manière de recollement n'est essentiellement pas du tout modifiée. Donc l'opération de Rauzy-Veech definit une homéomorphisme d'identité entre $(M_{\Lambda_\mathrm{b},\pi}, \Sigma_{\Lambda_\mathrm{b},\pi}) = (M_{\Lambda^*_\mathrm{b},\pi'}, \Sigma_{\Lambda^*_\mathrm{b},\pi'})$.*

Soit Λ et Λ' deux couples de vecteurs compatibles quelconques, respectivement de données combinatoire π et π'. Le lemme 4.10 nous assure qu'il y a deux chemins de couples, respectivement $\gamma = \{\Lambda(t)\}_{t\in[0,1]}$ joignant Λ à Λ_b et $\gamma' = \{\Lambda'(t)\}_{t\in[0,1]}$ joignant Λ^*_b à Λ' où Λ_b est supposé sans liaison en vertu du corollaire 4.14, d'où deux arcs de polygones $\{\Omega_{\Lambda(t),\pi}\}_{t\in[0,1]}$ et $\{\Omega_{\Lambda'(t),\pi'}\}_{t\in[0,1]}$. On peut donc appliquer le théorème 4.8, qui définit ici des homéomorphismes $\Psi^{r,s} : \Omega_{\Lambda(r),\pi} \mapsto \Omega_{\Lambda(s),\pi}$ et $\Psi'^{r,s} : \Omega_{\Lambda'(r),\pi'} \mapsto \Omega_{\Lambda'(s),\pi'}$. Les condtions sur les bords assures qu'il commutent avec les recollements construissant des surfaces de translation; ce qui induit deux familles de homéomorphismes $\Phi^{r,s} : (M_{\Lambda(r),\pi}, \Sigma_{\Lambda(r),\pi}) \mapsto (M_{\Lambda(s),\pi}, \Sigma_{\Lambda(s),\pi})$ et $\Phi'^{r,s} : (M_{\Lambda'(r),\pi'}, \Sigma_{\Lambda'(r),\pi'}) \mapsto (M_{\Lambda'(s),\pi'}, \Sigma_{\Lambda'(s),\pi'})$.

Définissons $R_\mathrm{b} : (M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi}) \mapsto (M_{\Lambda',\pi'}, \Sigma_{\Lambda',\pi'})$ par $R_\mathrm{b} = \Phi'^{0,1} \circ \Phi^{0,1}$. Le théoème suivant est central:

Théorème 4.16. *Modulo les homotopie préservant les points marqués, R_{b} est uniquement déterminé.*

Preuve. Supposons qu'on fasse deux choix différents de la configuration compatibles et des chemins joignants: disons Λ_{b}^0 et Λ_{b}^1, munie respectivesment des chemins γ_0, γ_0' et γ_1, γ_1'.

Notons les quatres familles engendrées de homéomorphismes de surfaces respevtivement par $\{\Phi_0^{r,s}\}$, $\{\Phi'^{r,s}_0\}$, $\{\Phi_1^{r,s}\}$ et $\{\Phi'^{r,s}_1\}$. D'après le lemme 4.13 il existe un chemin $\eta = \{\tilde{\Lambda}(t)\} = \{(\tilde{\lambda}(t), \tilde{\tau}(t)\}_{t\in[0,1]}$ de couples fortement compatibles dans $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{t}}(\pi)$ tels que $\tilde{\Lambda}(0) = \Lambda_{\mathrm{b}}^0$, $\tilde{\Lambda}(1) = \Lambda_{\mathrm{b}}^1$, $\tilde{\Lambda}(t)$ soit Lipschitz continu. Pratiquons la procédure qu'on a vue dans la remarque 4.15 à tout $\tilde{\Lambda}(t)$, on construit une famille de surfaces de translation $\eta' = \{\tilde{\Lambda}'(t) := \tilde{\Lambda}^*(1-t)\}$ correspondant aux donnée combinatoire π'. η' est un chemin Lipschitz continu parce que les vecteurs de longueurs et de supension de $\tilde{\Lambda}^*(1-t)$ dépendent linéairement de ceux de $\tilde{\Lambda}(t)$. Alors il y a deux nouvelle familles de surfaces $\{(M_{\tilde{\Lambda}(t),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(t),\pi})\}$ et $\{(M_{\tilde{\Lambda}'(t),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}'(t),\pi})\}$, munies de deux familles de homéomorphismes naturelles $\{\tilde{\Phi}^{r,s}\}$ et $\{\tilde{\Phi}'^{r,s}\}$.

Les deux paires de chemin $(\gamma_1, \eta\circ\gamma_0)$ et $(\gamma_1', \gamma_0'\circ\eta')$ relient respecivement les mêmes sources et destinations. Donc le lemme 4.9 s'applique et asuure des homotopies $\Phi_1^{0,1} \sim \tilde{\Phi}^{0,1}\circ\Phi_0^{0,1} : (M_{\tilde{\Lambda}(0),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(0),\pi}) \mapsto (M_{\tilde{\Lambda}(1),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(1),\pi})$ et $\Phi'^{0,1}_1 \sim \Phi'^{0,1}_0 \circ \tilde{\Phi}'^{0,1}$: $(M_{\tilde{\Lambda}(1),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(1),\pi}) \mapsto (M_{\tilde{\Lambda}(0),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(0),\pi})$. Alors $\Phi'^{0,1}_1\circ\Phi_1^{0,1} \sim \Phi'^{0,1}_0\circ(\tilde{\Phi}'^{0,1}\circ\tilde{\Phi}^{0,1})\circ\Phi_0^{0,1}$, afin de voir $\Phi'^{0,1}_1\circ\Phi_1^{0,1} \sim \Phi'^{0,1}_0\circ\Phi_0^{0,1}$ il suffit donc de démontrer que $\tilde{\Phi}'^{0,1}\circ\tilde{\Phi}^{0,1}$ est homotope à l'application d'identité dans la paire d'espaces $(M_{\tilde{\Lambda}(0),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(0),\pi}) = (M_{\tilde{\Lambda}'(1),\pi'}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}'(1),\pi'})$.

Notons $(M_t, \Sigma_t) = (M_{\tilde{\Lambda}(t),\pi}, \Sigma_{\tilde{\Lambda}(t),\pi})$, $\Omega_t = \Omega_{\tilde{\Lambda}}(t), \pi)$, $\Omega_t' = \Omega_{\tilde{\Lambda}'}(t), \pi')$,par σ_t l'application de recollement $\Omega_t \mapsto M_t$, par σ_t' l'application de recollement $\Omega_t' \mapsto M_t'$, où Ω_t' et obtenue en translatant un triangle dans Ω_t par le vecteur $h_t = (u_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}}) - u_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b}}), v_{\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{b}}) - v_{\mathrm{b}}(\alpha_{\mathrm{b})})$ et le recollant le long d'un des cotés. Construissons un espace $X = \bigsqcup_{t\in[0,1]} M_t$ avec une partie $Y = \bigsqcup_{t\in[0,1]} \Sigma_t$. Alors l'application $p : (x,s) \mapsto \tilde{\Phi}^{0,t}(x_0) \in M_t \in X$ est une bijection entre les paires $(M_0, \Sigma_0)\times[0,1]$ et (X,Y), qui munit X de la topologie produit de $M_0\times[0,1]$, noté $\mathcal{T}$. Donc dans M_t la topologie induite $\mathcal{T}_t = \{\tilde{\Phi}^{0,t}(U) | U \text{ouvert dans } M_0\}$, comme $\tilde{\Phi}^{0,t}$ est un homéomorphisme, $\mathcal{T}_t$ coincïde avec la topologie usuelle de M_t.

Considérons l'application $F : X \mapsto M_0$ définie par $F(x) = \tilde{\Phi}'^{s,1}(x), x \in M_s, \forall s$. Montrons que F est continue par rapport à $\mathcal{T}$. Comme $(\tilde{\Phi}'^{s,1})^{-1} = \tilde{\Phi}'^{0,s}\circ(\tilde{\Phi}'^{0,1})^{-1}$, les préimages des ouverts ont la forme $\bigsqcup_{s\in[0,1]} \tilde{\Phi}'^{0,s}(U)$ où U est un ouvert dans M_1. Supposons que $x \in M_t \subset X$ est dans un tel préimage, notons $U_r = \tilde{\Phi}'^{0,1-r}(U)$, alors $x \in U_t$. On peut toujour choisir un voisiage ouvert V_t de x dan U_t tel que $\mathrm{int}V_t \subset U_t$. Il y a un ouvert $V \subset M_0$ tel que $V_t = \tilde{\Phi}^{0,t}V$, notons $V_r = \tilde{\Phi}^{0,r}V$.

Car les couples $\tilde{\Lambda}(t)$ et $\tilde{\Lambda}'(t)$ sont Lipchitz continus en t. Donc $\tilde{\Psi}^{0,r} : \Omega_0 \mapsto \Omega_r \subset \mathbb{R}^2$ est équicontinu en r par rapport à Ω_0, $\tilde{\Psi}'^{0,s} : \Omega_1 \mapsto \Omega_{1-s}$ est équicontinu en s par rapports à Ω_1. Supposons que K est une constante de Lipchitz commune de $\tilde{\Psi}'^{0,s}$ dans Ω_1 ainsi que de $\tilde{\Psi}^{0,r}$ dans Ω_0.

Soit $w \in \Omega_r, w' \in \Omega'_r$, définissons une fonction continue de distance $d_r(w,w') = \min\{|w-w'|, |w+h_r-w'|\}$. On remarque que $d_r(w,w') = 0$ si et seulement si $\sigma_r(w) = \sigma'_r(w)$.

Comme le recollement commute avec les flots $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}'$, on a

$$\sigma_r^{-1}(\mathrm{int}V_r) = \sigma_r^{-1}(\tilde{\Phi}^{0,r}(\mathrm{int}V)) = \tilde{\Psi}^{0,r}(\sigma_0^{-1}(\mathrm{int}V)),$$

$$\sigma'^{-1}_r(U_r^c) = \sigma'^{-1}_r(\tilde{\Phi}'^{0,1-r}(U^c)) = \tilde{\Psi}'^{0,1-r}(\sigma'^{-1}_r(U^c)).$$

$\sigma_t^{-1}(\mathrm{int}V_t)$ et $\sigma'^{-1}_t(U_t^c)$ étant fermés, le minimum $\delta = \min\{d_t(w,w')|w \in \sigma_t^{-1}(\mathrm{int}V_t), w' \in \sigma'^{-1}_t(U_t^c)$ est atteint. Comme $\mathrm{int}V_t \bigcap U_t^c = \emptyset$, $\delta > 0$.

Supposon $|r-t| < \epsilon < \frac{\delta}{5K}$, alors $\forall \sigma_r(y) \in \mathrm{int}V_r, \forall \sigma'_r(y') \in U_r^c$, on a $y \in \tilde{\Psi}^{0,r}(\sigma_0^{-1}(\mathrm{int}V))$, $y' \in \tilde{\Psi}'^{0,1-r}(\sigma'^{-1}_r(U^c))$. $\exists z \in \sigma_0^{-1}(\mathrm{int}V), z' \in \sigma'^{-1}_1(U^c)$ tels que $y = \tilde{\Psi}^{0,r}(z)$, $y' = \tilde{\Psi}'^{0,1-r}(z')$. Posons $w = \tilde{\Psi}^{0,t}(z) \in \sigma_t^{-1}(\mathrm{int}V_t)$, $w' = \tilde{\Psi}'^{0,1-t}(z') \in \sigma'^{-1}_t(U_t^c)$. Alors $|y-y'| \geq |w-w'| - |w-y| - |w'-y'| \geq d_t(w,w') - 2K|r-t| > \delta - \frac{2\delta}{5} > 0$, $|y+h_r-y'| \geq |w-w'| - |w-y| - |w'-y'| - |\Psi^{0,t}(E_{u_t(\alpha_b)}) - \Psi^{0,r}(E_{u_t(\alpha_b)})| - |\Psi^{0,t}(E_{u_b(\alpha_b)}) - \Psi^{0,r}(E_{u_b(\alpha_b)})| \geq d_t(w,w') - 4K|r-t| > \delta - \frac{4\delta}{5} > 0$, où E_k sont les sommets dans Ω_0. Donc $d_r(y,y') > 0$, $\sigma_r(y) \neq \sigma'_r(y')$.

Ceci assure que pour $r \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$, $\mathrm{int}V_r \cap U_r^c = \emptyset$. Donc V_r est contenu dans U_r. C'est-à-dire on a trouvé un ouvert $\{\tilde{\Phi}^{0,r}(y)|r \in (t-\epsilon, t+\epsilon), y \in V\}$ qui est contenu dans le préimage en question $\bigsqcup_{s\in[0,1]} \tilde{\Phi}'^{0,s}(U)$. F est donc continue.

L'application p est continue par définition, alors $F \circ p : M_0 \times [0,1] \mapsto M_0$ l'est aussi. Notant que $F(p(x,t)) = \tilde{\Phi}'^{t,1}\tilde{\Phi}^{0,t}(x)$ fixe la partie Σ et que $F(p(x,0)) = \mathrm{id}$, $F(p(x,1)) = \tilde{\Phi}'^{0,1} \circ \tilde{\Phi}^{0,1}$, la homotopie que l'on cherche est construite. □

Notons que la procédure dans la remarque 4.15 est inversible. En partant de l'autre coté on peut construire similairement un homéomorphisme $R_{\mathrm{b}^{-1}} : (M_{\Lambda',\pi'}, \Sigma_{\Lambda',\pi'}) \mapsto (M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$, unique modulo une homotopie et préservant l'orientation naturelle et les points marqués correspondants. Et on a des relations $R_{\mathrm{b}^{-1}} \circ R_{\mathrm{b}} \sim \mathrm{id}$, $R_{\mathrm{b}} \circ R_{\mathrm{b}^{-1}} \sim \mathrm{id}$.

Symmétriquement si $\pi'' = t.\pi$ est la configuration de cordonnées combinatoire obtenue par une opération de type t sur π et Λ, Λ'' sonts deux couples de vecteurs compatibles quelconques respectivement pour π' et π'', il y a deux homéomorphismes $R_{\mathrm{t}} : (M_{\Lambda',\pi}, \Sigma_{\Lambda',\pi}) \mapsto (M_{\Lambda,\pi''}, \Sigma_{\Lambda,\pi''})$ et $R_{\mathrm{t}^{-1}} : (M_{\Lambda'',\pi''}, \Sigma_{\Lambda'',\pi''}) \mapsto (M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$, uniques homotopie près et préservant l'orientation naturelle et les points marqué correspondants, tels que $R_{\mathrm{t}^{-1}} \circ R_{\mathrm{t}} \sim \mathrm{id}$, $R_{\mathrm{t}} \circ R_{\mathrm{t}^{-1}} \sim \mathrm{id}$.

Soit X une variété topologique compacte connexe orientée, munie d'une partie Y. Notons par $\mathrm{Hom}^+(X,Y)$ le groupe de tout homéomorphisme $(X,Y) \mapsto (X,Y)$ qui préserve l'orientation de X et fixe tout point de Y. Deux éléments sont par définition équivalents s'ils sont homotopes dans l'espace d'applications continues préservant l'orientation et fixant tout point de Y. Notons par $\mathcal{M}(X,Y)$ la famille des classes d'équivalence.

Lemme 4.17. *$\mathcal{M}(X,Y)$ est un groupe.*

Preuve. Car si $h \sim h'$, $g \sim g'$ alors $h \circ g \sim g \circ h$, une multiplication $[h] \circ [g] = [h \circ g]$ est bien définie. Elle est évidemment associative. [id] étant l'identité, tout $[g]$ possède un inverse $[g^{-1}]$ qui est donc unique. □

Dans ce rapport, nous l'appelons le groupe modulaire de (X,Y).

Soit $\gamma : \pi = \pi_0 \xrightarrow{\mathrm{c}_0} \pi_1 \xrightarrow{\mathrm{c}_1} .... \xrightarrow{\mathrm{c}_n} \pi_n = \pi'$ un chemin dans un diagramme de Rauzy $\mathcal{R}$, où chaque c_i est un des quatres types t, b, t^{-1} et b^{-1}. Couplons tout π_i avec une configuration compatible quelconque Λ_i, alors il y a une séquence de homéomorphismes qu'on écrit R_{c_i} entre les surfaces associées aux sommets adjacents. Le composé de ses homéomorphismes est noté R_γ, il est unique modulo une homotopie et préserve l'orientation naturelle et les points marqué correspondants. Le théorème précédent assure aussi qu'il ne dépend pas des choix de $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_{n-1}$. Si on choisit les mêmes Λ et Λ_1 alors il y a une homotopie $R_{\gamma^{-1}} \circ R_\gamma \sim \mathrm{id}$.

Fixons un $\pi \in R$ et une configuration compatible Λ. Alors à tout chemin γ qui a π comme source et destination est ainsi associé un élément $[R_\gamma]$ de $\mathcal{M}(M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$. Comme dans un graphe tout chemin homotope au chemin trivial a la forme $\gamma^{-1} \circ \gamma$, deux chemins homotopes ont la même classe correspondante. La combinaison des chemin commute avec la multiplication des classes, d'où le théorème suivant.

Théorème 4.18. *Il y a un morphisme de groupe Ξ du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{R}, \pi)$ dans $\mathcal{M}(M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$, $\Xi([\gamma]) := [R_\gamma]$.*

5 Le cas du tore

5.1 Structure des diagrammes de Rauzy

Soit $\mathcal{R}$ un diarammes de Rauzy, dont le genre correspondant est égal à 1 et l'alphabet contient d lettre, étudions un de son élément π. Par la formule $s = d - 2g + 1$ il y a $d - 1$ cycles de l'action de θ que la remarque 3.15 définit. Mais l'ensemble de flèches $\{\mathrm{L}^\alpha, \mathrm{R}^\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ est de cardinal $2d - 2$ après réduction et tout cycle est de longueur paire. En conséquence tout cycle a longueur 2.

Si $1 \leq i < d$, $\alpha = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(i)$, $\beta = \pi_{\mathrm{t}}^{-1}(i+1)$, supposons $\pi_{\mathrm{b}}(\alpha) \neq d$, $\pi_{\mathrm{b}}(\beta) \neq 1$, alors on peut conclure que $\pi_{\mathrm{b}}(\beta) = \pi_{\mathrm{b}}(\alpha) + 1$. En effet, $\theta(\mathrm{R}^\alpha) = \mathrm{L}^\beta$, $\pi_{\mathrm{b}}(\alpha) \neq d$ implique que la flèche L^β n'est pas identifiée à $\mathrm{L}^{\pi_{\mathrm{t}}^{-1}(1)}$: θ agit directement sur elle, et $\theta(\mathrm{L}^\beta)$ est une flèche de type R. Comme le cycle est de longueur 2, celle-ci est soit R^α, soit identifiée à R^α. Ce dernière cas ne peut pas apparaître car $\pi_{\mathrm{b}}(\alpha) \neq d$. Donc $\theta(\mathrm{L}^\beta) = \mathrm{R}^\alpha$ à cause de la longueur 2; ce qui veut dire que β est directement à droite de α dans la ligne bottom.

Notons $j = \pi_t(\pi_b^{-1}(1))$, $k = \pi_b(\pi_b^{-1}(d))$. Afin que π soit irréductible, $j > 1$, $k < d$. Donc la relation de adjacence entre la $j-1$-ième lettre et la j-ième ne est pas gardée. Celle entre la k-ième lettre et la $k+1$-ième non plus. Donc sauf ces deux exceptions, toute relation d'adjacence dans l'ordre top est préservée dans l'ordre bottom.

Cela veut nous dire que la ligne top est coupée à ces deux positions et décomposée en trois morceaux qui sont retriés dans l'ordre bottom. On voit que $j > k$ car sinon les lettres entre la j-ième et la k-ième inclues sont encores adjacentes dans la ligne bottom, où la j-ième est au tout début et la k-ième à la fin, donc un morceaux de longueur au plus $d-2$ devient de longueur d. Donc on a forcément trois morceaux de la forme: $\begin{matrix} UVW \\ WVU \end{matrix}$. Il est facile de voir lorsque U et W sont non-vides la configuration est toujours irréductible.

Notons par $l = j-2$,$m = k-j+1$, $n = d-k-1$ respectivement les longueurs des trois morceaux. Alors $l, m, n \geq 0$, $l+m+n = d-2$. Il y a trois catégories de configuration de données combinatoires:
i). Sommets spéciaux: $l = n = 0$;
ii). Sommets liés: $l = 0, n > 0$ ou $l > 0, n = 0$;
iii). Sommets semi-liés: $l > 0, n > 0$.

Expliquons la signification de ces noms. En un sommet spécial, $\pi_t^{-1}(1) = \pi_b^{-1}(d)$, $\pi_b^{-1}(1) = \pi_t^{-1}(d)$. Les deux morceaux aux extrémités ne contienne qu'une seule lettre, et celui au milieu en a $d-2$. Lorsqu'on part d'un sommet spécial π et répéter l'opération de Rauzy-Veech d'un seul type, on obtient un cycle de longueur $d-1$ quand on revient à π; touts les autres sommets dans ce cycle sont des sommet liés. Il y a deux tels cycles, un pour chaque type, en un sommets spécial.

Supposons que π soit lié, avec $l = 0, n > 0$ par exemple. π appartient à un cycle d'opérations de Rauzy-Veech de type b de longueur $d-1$, qui lui relie à un point spécial. Si on part de π et suit des t opération, on parcourt un autre cycle, de longueur $d-1-n$, dont tout autre point est semi-lié. Le cas $n = 0, l > 0$ est symétrique.

Par chaque sommet semi-lié, les deux cycles passants contenant respectivement $d-1-l$ et $d-1-n$. Chacun de ces cycle contient un seul sommet lié et touts les points restes sont semi-liés.

En sommant, il y a deux catégories de cycles formés par des opérations d'un seul type. L'un, dit cycle liant, contient un seul sommet spécial et $d-2$ sommet liés; l'autre, dit cycle semi-liant, contient un seul sommet lié et moins de $d-3$ sommet semi-liés.

Une opération de Rauzy-Veech fixe respecive les premiers lettres dans les ordres top et bottom, disons A et C. Soit $\mathcal{A} = \{A, B_1, B_2, ..., B_{d-2}, C\}$. Notons par $\mathcal{R}(A, C)$

l'ensemble des configurations de données combinatoires irréductible de genre 1. Alors il y a deux choses à décider: la distribution (l, m, n) et l'ordre des lettre B_i. Le nombre des triplets $(l, m, n) : l, m, n \geq 0, l + m + n = d - 2$ étant égal à C_d^2, $\#\mathcal{R}(A, C) = C_d^2 \cdot (d-2)! = \frac{1}{2}d!$.

A partir de $\begin{matrix} AB_1B_2...B_nC \\ CB_1B_2...B_nA \end{matrix}$, on applique une suite d'opération de Rauzy:

$$\begin{matrix} AB_1B_2...B_nC \\ CB_1B_2...B_nA \end{matrix} \xrightarrow{b^{n-k+1}} \begin{matrix} AB_kB_{k+1}..B_nCB_1B_2..B_{k-1} \\ CB_1B_2......................B_nA \end{matrix} \xrightarrow{t^{k-1}} \begin{matrix} AB_kB_{k+1}....B_nCB_1B_2....B_{k-1} \\ CB_1B_2....B_{k-1}AB_kB_{k+1}....B_n \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{b^{k-1}} \begin{matrix} AB_kB_{k+1}..B_nB_1B_2..B_{k-1}C \\ CB_1B_2..B_{k-1}AB_kB_{k+1}..B_n \end{matrix} \xrightarrow{t^{n-k+1}} \begin{matrix} AB_kB_{k+1}..B_nB_1B_2..B_{k-1}C \\ CB_kB_{k+1}..B_nB_1B_2..B_{k-1}A \end{matrix}.$$

Donc en vertu des opérations de Rauzy-Veech on peut couper la partie des B_i dans un sommet spécial en deux et obtient un autre sommet spécial en les échangeant. Alors il est possible de atteindre tout sommet spécial a partir d' un (on choisit la première des B_i, la met à la deuxième position, puis la deuxième d'entre les B_i,...). Comme tout sommet semi-lié est connecté à un lié, et tout lié est connecté à un spécial. On a ainsi montré que $\mathcal{R}(A, C)$ est connexe et donc un diagramme de Rauzy, qu'on écrit simplement par $\mathcal{R}_1$. Evidemment tout diagramme de Rauzy avec $\#A = d$ et $g = 1$ lui est équivalent.

Dans $\mathcal{R}_1$, il y a $(d-2)!$ sommets spéciaux, $2(d-2) \cdot (d-2)!$ sommets liés et $\frac{1}{2}(d-2)(d-3) \cdot (d-2)!$ sommets semi-liés.

5.2 Dégénérence

Soit α une lettre dans $\mathcal{A} = \{A, B_1, B_2, ..., B_{d-2}, C\}$, on l'enlève dans le diagramme $\mathcal{R}(A, C)$. Alors avec $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \{\alpha\}$, la dégénérence décompose $\mathcal{R}(A, C)$ en plusieurs diagrammes de Rauzy plus petits.

Rappelons que seulements les sommets essentiels, c'est-à-dire les sommets dont aucune des dernières lettres dans les ordres top et bottom n'est α, devienne des sommets dans les diagrammes après la dégénérence.

Montrons d'abords que le préfixe maximal de tout sommet essentiel après avoir effaçant α est vide. En effet, si $\alpha \in \{B_1, B_2, ..., B_{d-2}\}$, alors de le supprimer n'est autre que de raccourcir un des trois morceaux par un lettre; ce qui ne change pas la structure de trois morceaux donc après l'efface les données combinatoires sont encore irréductible et le préfixe maximal est de longueur nulle. Si par contre $\alpha \in \{A, C\}$, supposons $\alpha = C$ par exemple. Si $n > 0$ alors d'effacer C ne change toujours pas la structure de trois morceaux. Mais $n = 0$ contredit le fait que π est un sommet essentiel car C se trouve à la fin de la ligne top. Donc les nouveaux diagrammes ont $\mathcal{B}$ comme alphabet. La discussion précédente montre aussi que le genre de ces nouveaux diagrammes sont toujours 1, donc leurs cardinals sont tous $\frac{1}{2}(d-1)!$.

Il faut compter le nombre des sommets essentiels. Pour ça on distincte entre deux cas:

i). Si $\alpha \in \{B_1, B_2, ..., B_{d-2}\}$, alors tout sommet spécial est essentiel. D'entre les sommets liés, un sur $d-2$ est non-essentiel; pour les sommets semi-liés c'est deux sur $d-2$, donc il y a $(d-2)! + \frac{d-3}{d-2} \cdot 2(d-2) \cdot (d-2)! + \frac{d-4}{d-2} \cdot \frac{1}{2}(d-2)(d-3) \cdot (d-2)! = \frac{d-2}{2} \cdot (d-1)!$ sommets essentiels donc $d-2$ nouveaux diagrammes.

ii). Si $\alpha \in \{A, C\}$, alors tout sommet spécial est non-essentiel; d'entre les sommets liés, il y a une moitié qui sont essentiels; tout sommet semi-lié est essentiel. Donc il y a $\frac{1}{2} \cdot 2(d-2) \cdot (d-2)! + \frac{1}{2}(d-2)(d-3) \cdot (d-2)! = \frac{d-2}{2} \cdot (d-1)!$ sommets essentiels donc $d-2$ nouveaux diagrammes aussi.

5.3 Surjectivité dans les groupes modulaires

Un théorème classique ([2],p7) dit que:

Lemme 5.1. *Modulo un entier, toute application continue f de $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ se rélève uniquement à une application continue $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, en plus $\tilde{f}$ peut être écrit dans la forme $\tilde{f}(x) = Hx + \phi(x)$ où $H \in M(2, \mathbb{Z})$ est une matrice à termes entiers et $\phi(x)$ est une application $\mathbb{Z}^2$-périodique.* det$H$ *est le degré de f. Deux application f et f' sont homotopes si et seulements les matrices correspondantes coïncident.*

Lemme 5.2. *slxz Soit $\Gamma = \{\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}\}$ et $\Gamma' = \{\omega_1 e_1' + \omega_2 e_2', \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}\}$ deux réseaus dans $\mathbb{R}^2$. $p : \mathbb{R}^2 \mapsto X = \mathbb{R}^2/\Gamma$, $p' : \mathbb{R}^2 \mapsto X' = \mathbb{R}^2/\Gamma'$ les applications de quotient canonique. Soit $Y = \{0, u_1, u_2, ..., u_k\} \in \mathbb{R}^2$, $Y' = \{0, u_1', u_2', ..., u_k'\} \in \mathbb{R}^2$ deux ensembles discrets de même cardinal tels que $\{p(u)\}_{u \in Y}$ soient deux à deux distincts et $\{p'(u')\}_{u' \in Y}$ soient deux à deux distincts. Notons $S = p(Y)$, $S' = p'(Y')$. Alors les classes d'équivalence de homéomorphismes préservant l'orientation naturelle $\{f : (X, S) \mapsto (X', S') | f(p(0)) = p'(0), f(p(u_i)) = p'(u_i')\}$ modulo des homotopies sont bijectivement associé à l'ensemble $SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^{2k}$ par une application $\rho_{\Gamma, Y, \Gamma', Y'}$.*

Preuve. Le lemme précédent assure que tout tel homéomophisme f a un relèvement uniquement déterminé $\tilde{f}$, $\tilde{f}(x) = [e_1', e_2'] H [e_1, e_2]^{-1} x + \phi(x)$ avec $\phi(x)$ Γ-périodique tel que $\tilde{f}(0) = 0$. Comme f est un homéomorphisme préservant l'orientation il est de degré 1, donc $H \in SL(2, \mathbb{Z})$. $p'(\tilde{f}(u_i)) = f(p(u_i)) = p'(u_i')$, donc $\tilde{f}(u_i) - u_i' = [e_1', e_2'] m_i \in \Gamma'$ avec $m_i \in \mathbb{Z}^2$ uniquement déterminé. Si $f \sim f^*$ dans $C((X, S), (X', S'))$, alors comme Γ' est un ensemble discret, $\tilde{f}(u_i) - u_i' = \tilde{f}^*(u_i) - u_i'$. Ainsi on a montré l'application $\rho_{\Gamma, Y, \Gamma', Y'}([f]) := (H, \{m_i\})$ est bien définie.

En revanche si pour f et f^* on a $H = H^*$, $\tilde{f}(u_i) - u_i' = \tilde{f}^*(u_i) - u_i'$. Considérons l'application $\tilde{f}_t := \lambda \tilde{f} + (1 - \lambda) \tilde{f}^*$. Si $x_1 - x_2 \in \Gamma$ alors $\tilde{f}_t(x_1) - \tilde{f}_t(x_2) = [e_1', e_2'] H [e_1, e_2]^{-1} (x_1 - x_2) + \lambda(\phi(x_1) - \phi(x_2)) + (1 - \lambda)(\phi^*(x_1) - \phi^*(x_2)) = [e_1', e_2'] H [e_1, e_2]^{-1} (x_1 - x_2) \in \Gamma'$, d'où une application $f_t : X \mapsto X'$ qui à $\tilde{f}_t$ comme un relèvement. Comme

$\tilde{f}(u_i) = (\tilde{\phi}(u_i) - u'_i) + u'_i = \tilde{f}^*(u_i)$, $\tilde{f}_t(u_i) = f(u_i) = f^*(u_i)$ donc $f_t(p(u_i)) = p'(\tilde{f}_t(u_i)) = p'(u'_i)$, $f_t(p(0)) = p'(\tilde{f}_t(0)) = p'(0)$. On voit que f_t est une homotopie. Donc $\rho_{\Gamma,Y,\Gamma',Y'}$ est bijectif. $\square$

Lemme 5.3. *Si* $\rho_{\Gamma,Y,\Gamma',Y'}([f]) := (H, \{m_i\})$,$\rho_{\Gamma',Y',\Gamma'',Y''}([g]) := (G, \{n_i\})$, *alors*

$$\rho_{\Gamma,Y,\Gamma'',Y''}([g \circ f]) = (GH, \{Gm_i + n_i\})$$

Preuve. Supposons que $\tilde{f}(x) = [e'_1, e'_2]H[e_1, e_2]^{-1}x + \phi(x)$, $\tilde{g}(x) = [e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}x + \psi(x)$, alors $(g \tilde{\circ} f)(x) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})(x) = [e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}([e'_1, e'_2]H[e_1, e_2]^{-1}x + \phi(x)) + \psi(\tilde{f}(x))$. Donc la matrice correspondante est bien GH, et l'application périodique est $[e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}\phi(x) + \psi(\tilde{f}(x))$.

$[e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}\phi(u_i) + \psi(\tilde{f}(u_i)) = [e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}(u'_i + [e'_1, e'_2]m_i) + \psi(u'_i + [e'_1, e'_2]m_i) = [e''_1, e''_2]G[e'_1, e'_2]^{-1}u'_i + [e''_1, e''_2]Gm_i + \psi(u'_i) = [e''_1, e''_2]Gm_i + \tilde{f}'(u'_i) = [e''_1, e''_2](Gm_i + n_i) + u''_i$. $\square$

$SL(2, \mathbb{Z})$ agissant sur $(\mathbb{Z}^2)^k$ par $H.\{n_i\}_{i=1}^k = \{Hn_i\}_{i=1}^k$, la multiplication $(G, \{n_i\})(H, \{m_i\}) = (GH, G\{m_i\} + \{n_i\})$ définit le produit semi-direct $SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^k$. Prennons un cas spécial $\Gamma = \Gamma' = \Gamma''$, $Y = Y' = Y''$, alors on obtient le groupe modulaire de la paire $(X, p(Y))$:

Corollaire 5.4. $\mathcal{M}(X, p(Y)) \cong SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^k$.

Lemme 5.5. *Etant donnés* (Γ^0, Y^0), (Γ^1, Y^1) *et un homéophisme* f *qui envoie tout point de* Y^0 *en le point correspondant dans* Y^1. *S'il y a une famille* $(\Gamma^t, Y^t), f^t, t \in [0, 1]$ *de la même nature tels que* $e_1^t, e_2^t, u_1^t, ..., u_k^t$ *soient tous continus en* t *et les relèvements* $\tilde{f}^t$ *forment une homotopie, alors*

$$\rho_{\Gamma^1,Y^1,\Gamma^1,Y^1}(f^1) = (\mathrm{id}, \{0\}).$$

Preuve. $[e_1^t, e_2^t]H^t = [\tilde{f}^t(e_1^0), \tilde{f}^t(e_2^0)]$ est continu en t et la matrice $[e_1^t, e_2^t]$ est continues et inversible, donc $[e_1^t, e_2^t]^{-1}$ est continue et H^t est donc continu. $\tilde{f}^t(u_i^0) - u_i^t$ est aussi continu en t. Comme $SL(2, \mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}^2)^k$ sont discrets, donc H^t et $\tilde{f}^t(u_i^0) - u_i^t$ sont constantes. Donc $\rho_{\Gamma^0,Y^0,\Gamma^1,Y^1}(f^1) = \rho_{\Gamma^0,Y^0,\Gamma^0,Y^0}(\mathrm{id}) = (\mathrm{id}, \{0\})$. $\square$

Soit $\mathcal{A} = \{A, B_1, B_2, ..., B_{d-2}, C\}$, considérons une configuration de données combinatoires π dans le diagramme $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(A, C)$, dont le triplet caractéristique est (l, m, n). Alors pour tout couple de vecteurs de longueurs et de suspensions, le bord du polygone $\Omega_{\Lambda,\pi}$ se décompose en six morceaux: $U^{\mathrm{t}} = E_1E_2...E_{l+2}$, $V^{\mathrm{t}} = E_{l+2}E_{l+3}...E_{l+m+2}$, $W^{\mathrm{t}} = E_{l+m+2}E_{l+m+3}...Ed + 1$, $U^{\mathrm{b}} = F_{m+n+2}F_{m+n+3}...F_{d+1}$, $V^{\mathrm{b}} = F_{n+2}F_{n+3}...F_{m+n+2}$, $W^{\mathrm{b}} = F_1F_2...F_{n+2}$. Le recollement construisant $M_{\Lambda,\pi}$ identifie les morceaux correspondants en top et en bottom. Notons par e_1 le vecteur $\vec{F_1F}_{n+m+2}$ et par e_2 le vecteur $\vec{E_1E}_{l+m+2}$.

Alors $U^{\mathrm{b}} = U^{\mathrm{t}} + e_1$, $V^{\mathrm{b}} = V^{\mathrm{t}} - e_2 + e_1$, $W^{\mathrm{b}} = W^{\mathrm{t}} - e_2$. Ceci montre que $\{\Omega_{\Lambda,\pi} + \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}\}$ est bien un pavage du plan entier. Donc $M_{\Lambda,\pi}$ s'identifie au tore $\mathbb{R}^2/\Gamma_{\Lambda,\pi}$ où $\Gamma_{\Lambda,\pi}$ est le réseau engendré par e_1, e_2. Remarquons que les $\{E_{\pi_{\mathrm{t}}(B_i)}\}$ correspondent deux à deux à des points marqués distincts, et $E_1 = F_1 = (0,0)$ correspond à un autre point marqué. On a ainsi déterminé tout point marqué. Posons $u_i = E_{\pi_{\mathrm{t}}(B_i)}$ et q_i le point marqué correspondant. Ce système de notation est uniquement décidé.

Alors pour touts (Λ, π), (Λ', π'), les lemmes plus haut, appliqués avec $\Gamma = \Gamma_{\Lambda,\pi}$, $\Gamma' = \Gamma_{\Lambda',\pi'}$, $Y = \{0, u_1, u_2, ..., u_{d-2}\}$ et $Y' = \{0, u'_1, u'_2, ..., u'_{d-2}\}$, assure qu'à chaque homéomorphisme $f : (M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi}) \mapsto (M_{\Lambda',\pi'}, \Sigma'_{\Lambda',\pi})$ qui envoie q_i en q'_i, il est associé un élément $\rho_{\Lambda,\pi,\Lambda',\pi'}(f) \in SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$. f et f^* correspond au même élément si et seulement s'ils sont reliés par une homotopie $\{f_t\}$ telle que $f_t(q_i) = q'_i$, $\rho_{\Lambda,\pi,\Lambda'',\pi''}(g \circ f) = \rho_{\Lambda',\pi',\Lambda'',\pi''}(g)\rho_{\Lambda,\pi,\Lambda',\pi'}(f)$.

Le homéomorphisme $\Phi^{r,s}$ donné par le corollaire 4.12 correspond à l'élément neutre $(\mathrm{id}, \{0\})$. En effet, son relèvement dans le plan $\tilde{\Phi}^{r,s} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ n'est autre qu'un pavage de $\Psi^{r,s}$. Comme $\Psi^{r,s}$ est homotope à l'identité, $\tilde{\Phi}^{r,s}$ l'est aussi. En plus on remarque que les symbols $e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2}$ ainsi que l'origine sont stables par ces flots. Ainsi le lemme 5.5 s'applique.

Soit γ un chemin dans le diagrammes de Rauzy qui va de π à π', soit Λ, Λ' une paire de leurs congurations de vecteurs. La discussion devant le théorème 4.18 assure l'existence du morphisme $R_\gamma : (M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi}) \mapsto (M_{\Lambda',\pi'}, \Sigma_{\Lambda',\pi'})$, unique homotopie près et préservant tout ce qu'il faut, d'où un élément de $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$ associé. Si on choisit Λ^*, Λ'^* d'une autre manière, alors les deux homéomorphismes R_γ et R^*_γ sont conjugués par deux homéomorphismes de type $\Phi^{r,s}$; ce qui montre que l'élément du groupe ne dépend que du chemin γ.

On note cet élément par $\mu(\gamma) = \rho(R_\gamma)$. Alors $\mu(\gamma \circ \eta) = \mu(\gamma) \circ \mu(\eta)$, $\mu(\emptyset) = (\mathrm{id}, \{0\})$ où $\emptyset$ représent un chemin trivial. Fixons un sommet π, notons que la restriction de μ dans le groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{R}_1, \pi)$ est égale au morphisme Ξ défini dans le théorème 4.18 si on identifie $\mathcal{M}(M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$ à $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$.

Exemple 5.6. *Soit γ un chemin composé d'une seule arête, dans le sens direct d'opérations de Rauzy-Veech, qui va de π à $\pi' = \mathrm{t}.\pi$ ou $\mathrm{b}.\pi$. Calculons $\mu(\gamma)$.*

Choisissons Λ dans $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{t}}(\pi)$ ou $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{b}}(\pi)$ selon le type de γ. En performant une procédure décrite par la remarque 4.15 ou celle qui lui est symétrique, on obtient une autre surface $(M_{\Lambda',\pi'}, \Sigma_{\Lambda',\pi'})$ à partir de $(M_{\Lambda,\pi}, \Sigma_{\Lambda,\pi})$ et une homéomorphisme R_γ entre eux. On a vu dans la même remarque que R_γ est exactement l'application d'identité, le relèvement $\tilde{R}_\gamma : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'est donc aussi. Alors ce qui détermine $\mu(R_\gamma) = (H, \{m_i\}_{i=1,..,d-2}) \in SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$ n'est autre que le changement sur le système de symbols $(e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2})$. Les formules sont explicites:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad e_l = h_{jl}e'_j + h_{kl}e'_k;$$
$$m_i = (m_{i,1}, m_{i,2})^{\mathrm{T}}, \quad u_i - u'_i = m_{i,1}e'_1 + m_{i,2}e'_2.$$

Selon le type de γ, et le triplet caratéristique (l, m, n) de π, on distincte quatre cas.

i). γ est de type b, $n = 0$. Alors le triangle $E_dE_{d+1}F_d$ est translaté et recollé le long de $E_{l+1}E_{l+2}$. $l' = l$, $m' = 0$, $n' = m$. La seule modification sur $(e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2})$ est: $e'_2 = e_2 - e_1$. Donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_i = (0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\forall i$.

ii). γ est de type b, $n > 0$. Alors $l' = l$, $m' = m+1$, $n' = n-1$. La seule modification sur $(e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2})$ est: $u'_i = u_i - e_1$. Donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_i = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ si $\pi_{\mathrm{t}}(B_i) = d$, $m_i = (0, 0)$ sinon.

iii). γ est de type t, $l = 0$. Alors le triangle $E_dE_{d+1}F_d$ est translaté et recollé le long de $F_{l+1}F_{l+2}$. $l' = m$, $m' = 0$, $n' = n$. La seule modification sur $(e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2})$ est:$e'_1 = e_1 - e_2$. Donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $m_i = (0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\forall i$.

iv). γ est de type t, $l > 0$. Alors $l' = l - 1$, $m' = m + 1$, $n' = n$. Dans ce cas les vecteurs $(e_1, e_2, u_1, u_2, ..., u_{d-2})$ ne sont pas changés. Donc $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m_i = (0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\forall i$.

Théorème 5.7. *$\forall \pi \in \mathcal{R}_1$, le morphisme de groupe Ξ définit dans le théorème 4.18 est surjectif.*

Preuve. Comme les groupes fondamentaux aux points de base différents sont conjugués, et ces conjugaisons est préservée par μ: $\mu(R_{\gamma\circ\eta\circ\gamma^{-1}}) = \mu(R_\gamma)\mu(R_\eta)\mu(R_\gamma)^{-1}$, il suffit de le montrer pour le sommet spécial $\pi = \begin{matrix} AB_1B_2..B_{d-2}C \\ CB_1B_2..B_{d-2}A \end{matrix}$.

Notons $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $k = 1, 2, ..., d-2$, notons $f_k = \{(f_k)_i\}_{i=1,..,d-2} \in (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$, $g_k = \{(g_k)_i\}_{i=1,..,d-2} \in (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$ tels que $(f_k)_i = (\delta_{ki}, 0)^{\mathrm{T}}$, $(g_k)_i = (0, \delta_{ki})^{\mathrm{T}}$.

Notons par w le sommet $\begin{matrix} AB_1B_2........................B_{d-2}C \\ CB_{k+1}B_{k+2}..B_{d-2}AB_1B_2..B_k \end{matrix}$ pour $0 \leq k \leq d-2$. Alors le triplet (l, m, n) de ω_k est $(k, d-k-2, 0)$. Notons que $\pi = \omega_0$. Une opération de Rauzy-Veech de type t transforme ω_k en ω_{k-1} pour $k \geq 1$ et ω_0 en ω_{d-2}. Notons par γ_k le chemin $\omega_k \xrightarrow{\mathrm{t}} \omega_{k-1} \xrightarrow{\mathrm{t}} ... \xrightarrow{\mathrm{t}} \omega_0$ si $k \geq 1$, par γ_0 la boucle $\omega_0 \xrightarrow{\mathrm{t}} \omega_{d-2} \xrightarrow{\mathrm{t}} \omega_{d-3} \xrightarrow{\mathrm{t}} ... \xrightarrow{\mathrm{t}} \omega_0$. Toute opération dans un chemin γ_k correspond à l'élément neutre dans

$SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$ sauf la première dans γ_0 qui correspond à $(T,0)$. Donc $\mu(R_{\gamma_k}) = (\mathrm{id}, 0)$ pour $k \geq 1$, $\mu(R_{\gamma_0}) = \Xi([\gamma_0]) = (T,0)$.

Pour $0 \leq k \leq d-2$ $k \leq l \leq d-2$, notons par σ_{kl} le sommet semi-lié

$$\begin{array}{l} AB_1B_2..B_kB_{l+1}B_{l+2}..B_{d-2}CB_{k+1}B_{k+2}..B_l \\ CB_{k+1}B_{k+2}..................B_{d-2}AB_1B_2.....B_k. \end{array}$$

Alors $\omega_k = \sigma_{kk}$. $\forall k,l$, σ_{kl} a triplet $(l,m,n) = (k, d-l-2, l-k)$. Si $l > k$, il y a une opération de Rauzy-Veech de type b envoie σ_{kl} à $\sigma_{k,l-1}$, qui correspond à l'élément du groupe (id, f_l). Si $l = k$, une opération de type b envoyant σ_{kk} à $\sigma_{k,d-2}$ donne l'élément $(S,0)$. Donc en notant par η'_k le chemin $\sigma_{kk} \xrightarrow{\mathrm{b}} \sigma_{k,d-2} \xrightarrow{\mathrm{b}} \sigma_{k,d-3} \xrightarrow{\mathrm{b}} ... \xrightarrow{\mathrm{b}} \sigma_{kk}$ on a $\mu(R_{\eta'_k}) = (id, f_{k+1})(id, f_{k+2})...(id, f_{d-2})(S,0) = (S, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i)$. Si $k > 0$ posons $\eta_k = \gamma_k \circ \eta'_k \circ \gamma_k^{-1}$, si $k=0$ posons $\eta_0 = \eta'_0$. Alors $\forall k$, la source et la destination de η_k sont π, et $\Xi([\eta_k]) = \mu(R_{\eta_k}) = (\mathrm{id},0)(S, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i)(\mathrm{id},0)^{-1} = (S, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i)$.

Dans le sous-groupe $G = \mathrm{Im}\Xi \subset SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$, on a déjà $(T,0) = \Xi([\gamma_0])$, $(S,0) = \Xi([\eta_{d-2}])$ et $(S, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i) = \Xi[\eta_k], 0 \leq k < d-2$. Alors:
$(S^{-1},0) = (S,0)^{-1} \in G$; $(T^{-1},0) = (S,0)^{-1} \in G$;
$(\mathrm{id}, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i) = (S, \sum_{l=k+1}^{d-2} f_i)(S^{-1},0) \in G, \forall 0 \leq k < d-2$;
$(\mathrm{id}, f_k) = (\mathrm{id}, \sum_{l=k-1}^{d-2} f_i)^{-1}(\mathrm{id}, \sum_{l=k}^{d-2} f_i) \in G, \forall 1 \leq k \leq d-2$;
$(T, f_k + g_k) = (T, T.f_k) = T(\mathrm{id}, f_k) \in G, \forall 1 \leq k \leq d-2$;
$(\mathrm{id}, f_k + g_k) = (T, f_k + g_k)(T^{-1}, 0) \in G, \forall 1 \leq k \leq d-2$;
$(\mathrm{id}, g_k) = (\mathrm{id}, f_k + g_k)(\mathrm{id}, f_k)^{-1} \in G, \forall 1 \leq k \leq d-2$.

S et T engendrent $SL(2,\mathbb{Z})$ et $\{f_k\}_{1 \leq k \leq d-2}$,$\{g_k\}_{1 \leq k \leq d-2}$ engendrent $(\mathbb{Z}^2)^{d-2}$, donc $(S,0)$, $(T,0)$, $\{(\mathrm{id}, f_k)\}_{1 \leq k \leq d-2}$ et $\{(\mathrm{id}, g_k)\}_{1 \leq k \leq d-2}$ engendrent le produit semi-direct $SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$. On y déduit $G = SL(2,\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^2)^{d-2}$, d'où la surjectivité. □

Références

[1] A. Avila, S. Gouëzel & J-C.Yoccoz, Exponential Mixing and the techmüller flow, préprint, 2005

[2] A. Fathi, Systèmes dynamiques, Edition de l'Ecole Polytechnique, 1999

[3] R.H. Fox, Covering spaces with singularities, Algebraic geometry and topology, p 243-257, Princeton University Press, 1957

[4] J-C. Yoccoz, Echanges d'intervalles, Cours Collège de France, 2005

[5] A. Zorich, Flat Surfaces, Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Volume 1, p439-586, Springer-Verlag, Berlin, 2006