

C^∞ -отображения интервала с притягивающими циклами сколь угодно больших периодов

В настоящей заметке строятся отображения интервала в себя класса C^∞ , обладающие некоторыми специальными и нетипичными для динамических систем свойствами.

Первый пример — отображение, имеющее притягивающие циклы сколь угодно больших периодов. Как известно [1], аналитические отображения имеют лишь конечное число притягивающих циклов (быть может, и ни одного, как, например, отображение $x \rightarrow 4x(1-x)$, $x \in [0, 1]$). Отображения класса C^∞ , как легко видеть, могут иметь счетное число притягивающих циклов, периоды которых не превосходят некоторой константы. Например, отображение $x \rightarrow f(x)$, где $f(x) = x + e^{-1/x} \sin 1/x$, $x > 0$, и $f(0) = 0$, имеет счетное число притягивающих неподвижных точек, сгущающихся в нуле. В [2] приведен пример отображения класса C^0 , имеющего притягивающие циклы сколь угодно больших периодов.

Во втором примере, конструктивно мало отличающемся от первого, строится отображение, имеющее так называемые гомтервалы. Гомтервал — это интервал, на котором все итерации отображения f — гомеоморфизмы. Как легко сообразить, гомтервалы, притягивающиеся к циклам, — обычное явление (например, для отображения $x \rightarrow \alpha x$, $|\alpha| < 1$, любой интервал — гомтервал). Проблема заключается в существовании гомтервалов, не притягивающихся к циклам. Отображения класса C^∞ не могут иметь таких гомтервалов. Пример отображения класса C^1 построен в [3]. В [4] построено отображение окружности класса C^∞ , обладающее нетривиальным гомтервалом, и с помощью процедуры, предложенной в [3], преобразовано в C^∞ -отображение интервала в себя. Таким образом, вопрос о существовании отображений интервала класса C^∞ , обладающих гомтервалами, решен положительно.

В нашем примере непосредственно строится отображение интервала, имеющее гомтервал, притягивающийся к счетному множеству точек.

1. Возьмем произвольное число $\lambda > 1$, последовательность $x_0 = 1/\lambda < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots \rightarrow 1$ и положим

$$f(x) = \lambda x, \quad x \in [0, x_0]. \quad (1)$$

Пусть $N_1 < N_2 < \dots$ — подпоследовательность натурального ряда, выбор которой будет уточнен ниже. Введем величины $f_n = x_n/\lambda^{N_n}$, $h_n = f_n - f_{n+1}$, функции

$$g_n(x) = \begin{cases} \exp\{-1/(x-x_n)^2(x-x_{n+1})^2\}, & x \in (x_n, x_{n+1}), \\ 0, & x = x_n, \end{cases}$$

и $J_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} g_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$. На интервале $[x_1, 1]$ положим

$$f(x) = \begin{cases} f_n - (h_n/J_n) \int_{x_n}^x g_n(x) dx, & x \in [x_n, x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0 & x = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Основные построения выполнены. Остается доопределить $f(x)$ так, чтобы получить C^∞ -отображение интервала в себя. На $I_0 = [x_0, x_1]$ в качестве $f(x)$ возьмем какую-либо функцию класса C^∞ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1, \quad f'(x_0) = \lambda, \quad f^{(m)}(x_0) = 0 \quad \text{при } m > 1; \\ f(x_1) &= f_1, \quad f^{(m)}(x_1) = 0 \quad \text{при } m \geq 1; \\ f(x) &> f_1 \quad \text{при } x \in [x_0, x_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $a = \max_{x \in I_n} f(x)$. При $x \in [1, a]$ положим

$$f(x) = \exp \{-1/(x-1)^2\}. \quad (4)$$

Функция $f(x)$, определенная на интервале $I = [0, a]$ с помощью (1)–(4), непрерывна на I и имеет непрерывные производные всех порядков всюду, кроме, возможно, точки $x = 1$. Для отображения $f: I \rightarrow I$ каждая точка $x_n, n \geq 1$, — периодическая притягивающая точка периода $N_n + 1$: $f^{N_n+1}(x_n) =$

$$= f^{N_n}(f_n) = \lambda^{N_n} f_n = x_n, \quad \left. \frac{d}{dx} f^{N_n+1}(x) \right|_{x=x_n} = f'(x_n) \left. \frac{d}{dx} f^{N_n}(x) \right|_{x=x_n} = 0.$$

Покажем, что $\{N_n, n = 1, 2, \dots\}$ можно выбрать так, чтобы производные $f^{(m)}(x), m > 0$, существовали и при $x = 1$ и были равны нулю. Для этого достаточно, чтобы при $m > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I_n} |f^{(m)}(x)| = 0$, где $I_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Рассмотрим интервал (x_n, x_{n+1}) . Последовательным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} f'(x) &= (h_n/J_n) g_n(x), \\ f''(x) &= (h_n/J_n) g_n(x) (Q_{n,2}(x)/P_n^{L_2}(x)), \\ f'''(x) &= (h_n/J_n) g_n(x) (Q_{n,3}(x)/P_n^{L_3}(x)), \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(m)}(x) &= (h_n/J_n) g_n(x) (Q_{n,m}(x)/P_n^{L_m}(x)), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n,2}(x)/P_n^{L_2}(x) &= (x_n + x_{n+1} - 2x)/[(x - x_n)(x - x_{n+1})]^2, \\ Q_{n,k+1}(x)/P_n^{L_{k+1}}(x) &= 2Q_{n,k}(x)(2x - x_n - x_{n+1})/P_n^{L_k+3}(x) + \\ &+ [Q'_{n,k}(x)P_n^{L_k}(x) - 2L_k P_n^{L_k-1}(x)(2x - x_n - x_{n+1})Q_{n,k}(x)]/P_n^{2L_k}(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n+1}), \quad L_{k+1} \leq 2L_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Из (6) следует, что $Q_{n,m}(x)$ — полином с непрерывными коэффициентами, зависящими только от m, x_n, x_{n+1} . Поскольку $x_n \rightarrow 1$, то

$$\max_{I_n} |Q_{n,m}(x)| \leq c_1(m), \quad (7)$$

где $c_1(m)$ — постоянная, зависящая только от m . Обозначим $\alpha_n = x_{n+1} - x_n$. Тогда

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp \{-1/(x - x_n)^2(x - x_{n+1})^2\} dx = \\ &= (x_{n+1} - x_n) \int_{-1/2}^{1/2} \exp \{-1/(x + 1/2)^2(x - 1/2)^2(x_{n+1} - x_n)^4\} dx = \\ &= \alpha_n \int_{-1/2}^{1/2} \exp \{-1/(x + 1/2)^2(x - 1/2)^2\alpha_n^4\} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя неравенство Гельдера, из (8) находим

$$J_n \geq \alpha_n \left(\int_{-1/2}^{1/2} \exp \{-1/(x + 1/2)^2(x - 1/2)^2\} dx \right)^{1/\alpha_n^4} = \alpha_n \kappa^{1/\alpha_n^4},$$

где

$$\kappa = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \{-1/(x + 1/2)^2(x - 1/2)^2\} dx, \quad 0 < \kappa < 1.$$

Таким образом,

$$\max_{x \in I_n} |f^{(m)}(x)| \leq c_1(m) (h_n/J_n) \max_{x \in I_n} |g_n(x)/P_n^{L_m}(x)|. \quad (9)$$

Принимая во внимание тот факт, что $\lim_{t \rightarrow +0} [\exp\{-1/t\}/t^k] = 0$ при $k > 0$, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I_n} |g_n(x)/P_n^{L_m}(x)| = 0. \quad (10)$$

Далее имеем

$$h_n/J_n \leq (1/\lambda)^{N_n} (x_{n+1} - x_n/\lambda^{N_{n+1}-N_n})/\alpha_n \kappa^{\alpha_n^{-4}} \leq 1/\lambda^{N_n} \alpha_n \kappa^{\alpha_n^{-4}} \leq 1, \quad (11)$$

если $\lambda^{N_n} \alpha_n \kappa^{\alpha_n^{-4}} \geq 1$, т. е. если

$$N_n \geq -(\ln \alpha_n + \alpha_n^{-4} \ln \kappa)/\ln \lambda. \quad (12)$$

Таким образом, какова бы ни была последовательность x_n , $n=1, 2, \dots$, из (10) и (11) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in I_n} |f^{(m)}(x)| = 0$, если последовательность

N_n , $n=1, 2, \dots$, выбрать так, чтобы при достаточно больших n удовлетворялось неравенство (12). Например, полагая, $\lambda = 1/\kappa$, $x_{n+1} - x_n = 1/n^2$ при достаточно больших n , находим $N_n \geq n^8 + 2 \ln n / \ln \lambda$. Отсюда видно, что для данного выбора x_n достаточно положить $N_n = n^8 + n$.

2. Для построения следующего примера возьмем произвольное число $\lambda > 1$ и последовательности y_n и z_n , $n=1, 2, \dots$, такие, что $1/\lambda < y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \dots < y_n < z_n < y_{n+1} < z_{n+1} < \dots \rightarrow 1$. Положим $\alpha_n = z_{n+1}/\lambda^{N'_n}$, $\beta_n = y_{n+1}/\lambda^{N'_n}$, где N'_n , $n=1, 2, \dots$, — некоторая подпоследовательность натурального ряда.

Заметим, что в предыдущем примере можно было бы положить $N_{2k-1} = N_{2k}$, $k=1, 2, \dots$, заботясь лишь о выполнении неравенства (12). Если сделать переобозначения $x_{2n-1} = y_n$, $x_{2n} = z_n$, $f_{2n-1} = \alpha_n$, $f_{2n} = \beta_n$, $h_n = f_n - f_{n+1}$, $N_n = N'_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, $n=1, 2, \dots$, то какова бы ни была последовательность x_n , можно выбрать последовательность N'_n так, чтобы функция $f(x)$, построенная так же, как и в предыдущем примере, принадлежала классу $C^\infty[0, a]$.

При этом интервал (y_1, z_1) (как и любой другой интервал (y_n, z_n) , $n > 1$) будет гомтервалом. Действительно, при отображении f интервал (y_1, z_1) переходит в интервал (α_1, β_1) , который, в свою очередь, после N'_1 итераций отображения f переходит в интервал (y_2, z_2) . Затем интервал (y_2, z_2) при отображении f переходит в интервал (α_2, β_2) , который после N'_2 итераций f переходит в (y_3, z_3) , и т. д. Очевидно, что все итерации $f^m(x)$, $m=1, 2, \dots$, монотонны на (y_1, z_1) , поскольку они представляют собой суперпозицию монотонных отображений. Также в силу монотонности $f^m(x)$, $m > 0$, для каждой точки интервала (y_1, z_1) ω -предельным множеством является $\{1, 1/\lambda, 1/\lambda^2, \dots, 1/\lambda^n, \dots, 0\}$.

1. Монпель П. Нормальные семейства аналитических функций. — М.—Л.: ОНТИ, 1936. — 240 с.
2. Шарковский А. Н. О циклах и структуре непрерывного отображения прямой в себя — Укр. мат. журн., 1965, 17, № 3, с. 104—112.
3. Coven E M., Nitecki Z. Non-wandering sets of the powers of maps of the interval. — Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1981, 1, №1, p. 9—31.
4. Hall G. R. A C^∞ Denjoy counterexample. — Ergodic Theory and Dynamical Systems 1981, 1, №3, p. 261—272.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
08.04.82